

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL FUZZY EN LA FORMULACIÓN DE ALIMENTOS PARA ANIMALES

MODELS OF FUZZY LINEAL PROGRAMMING IN THE FORMULATION OF FOOD FOR ANIMALS

David M. Morales¹

(1) Universidad "Vladimir I. Lenin", Facultad de Ciencias Técnicas, Departamento de Informática,
Centro Universitario Las Tunas - Cuba
(e-mail: moralesrey@ult.edu.cu)

Recibido: 02/08/2011 - Evaluado: 06/10/2011 - Aceptado: 03/01/2012

RESUMEN

En este trabajo se exponen modelos del Problema de la Dieta en producciones industriales de alimento animal con datos precisos e imprecisos en sus componentes, obteniéndose ventajas económicas significativas resultantes cuando se toma en consideración la imprecisión en todos o algunos componentes del modelo matemático respecto a la vía clásica empleada tradicionalmente a nivel mundial. Fueron analizados un grupo significativo de fórmulas correspondientes a un amplio surtido de productos elaborados en fábricas cubanas resultando, en todos los casos, el logro de los nutrientes especificados para cada especie a más bajo costo de producción por concepto de empleo de ingredientes en fórmula. La imprecisión se introduce a partir de posibles rangos de variación de pérdidas en los ingredientes en el proceso de manufactura o por el posible rango de variación en nutrientes de los ingredientes componentes de la mezcla.

ABSTRACT

In this paper, models of the Problem of the Diet are exposed in industrial productions of food animal with precise and imprecise data in your components are presented, being obtained significant economic advantages when inaccuracy of all or some components of the mathematical pattern are considered, in comparison to the traditional path globally taken. A significant group of formulas corresponding to a wide assortment of products elaborated in Cuban factories being were analyzed; in all the cases, the achievement of the specified nutrients for each species at lower production cost for the use of ingredients in the formula. The inaccuracy is introduced from possible ranges of variation of ingredient losses in the factory process or for the possible nutritious variation range in the mixture component ingredients.

Palabras clave: programación lineal fuzzy; número fuzzy; problema de la dieta; formulación industrial

Keywords: fuzzy lineal programming; number fuzzy; diet problem; industrial formulation

INTRODUCCIÓN

A nivel mundial se han desarrollado modelos matemáticos clásicos para obtener la solución del Problema de la Dieta para animales, los más difundidos y estudiados son los de Programación Lineal no obstante, a partir de la década del 80 del pasado siglo, se desarrollan otros modelos apoyados en la variabilidad inherente de algunos nutrientes en los ingredientes de la ración empleando métodos experimentales - estadísticos para determinar el aporte del nutriente en cuestión y, bajo esos principios, se emplean como coeficientes de un modelo general de Programación Lineal, lográndose con ello beneficiosos resultados económicos y productivos, hechos estos probados en los trabajos de Duncan (1986; 1988), D'Alfonso *et al.* (1992a; 1992b), Tozer (2000) y Roush (2004).

Con los trabajos de Lotfi A. Zadeh aparecen los conceptos de Conjunto y Número Fuzzy (Zadeh, 1975a; 1975b; 1975c), abriéndose un nuevo camino en la investigación y práctica científica. Acorde a estos nuevos descubrimientos en el área de las Matemáticas estrechamente relacionados con la Informática y que en el problema de formulación de raciones de uso zootécnico se presentan imprecisiones en las pérdidas de ingredientes dentro del proceso de manufactura, variabilidad en la matriz del contenido de nutrientes de ingredientes y posibles variaciones tolerables en las especificaciones de nutrientes en la dieta de los animales con influencia económica, nutricional y zootécnica se presenta este artículo fruto de varios años de investigación.

La formulación de raciones de uso zootécnico puede quedar resumida de la siguiente forma: se dispone de un conjunto de ingredientes de los que se conoce, en porcentaje, su contenido aproximado en nutrientes y el intervalo de variación de uno o más de ellos. Son conocidos los requerimientos nutricionales (mínimos y máximos) de cada específico del surtido (en porcentaje) así como límites de inclusión (mínimo y máximo) de cada ingrediente por específico, pudiendo surgir la necesidad de establecer relaciones de porcentaje entre dos o más ingredientes componentes de la mezcla. Además, se dispone de la información sobre las dosis de medicamentos (en gramos/Ton) indicados por los facultativos autorizados y las cantidades de los concentrados de vitaminas y minerales a incluir por tonelada en cualquier caso, el nivel de producción deseado y los valores de los coeficientes de pérdida por ingrediente y sus respectivos rangos (intervalos) de variación, así como sus precios, deseándose satisfacer los requerimientos nutricionales indicados y lograr uno (o más) de los siguientes objetivos: (1) la fórmula que produzca una combinación de ingredientes disponibles al más bajo costo, (2) la fórmula que minimice o maximice un requerimiento nutricional en particular y (3) la fórmula que minimice el uso de uno o más ingredientes componentes de la mezcla. Este artículo se centrará en el objetivo (1), es decir, la fórmula que produzca una combinación de ingredientes disponibles al más bajo costo.

METODOLOGÍA

Los sistemas informáticos utilizados basan su funcionamiento en modelos del Problema de la Dieta que tienen en cuenta pérdidas en los ingredientes (o posibles rangos de variación) e imprecisión en nutrientes de ingredientes que intervienen en la mezcla y se optó por realizar este análisis con los sistemas Pienso-LT (Versión 6.0 sobre MSDOS; Morales, 2005) y ForCan (Versiones 1.0-5.0 sobre Windows; Morales, 2008), cuyo diseño y programación aborda también el problema de la solución de modelos matemáticos con datos imprecisos en todos los componentes. Los análisis estadísticos correspondientes se realizan con los sistemas Excel, Microsoft 2003; STATGRAPHICS Plus versiones 2.1 (1994-1996) y 5.1, (1994-2001) Statistical Graphics Corporation y SPSS Versión 15.0 para Windows (2006).

Los datos correspondientes a límites de inclusión, aportes nutricionales de ingredientes y especificaciones nutricionales de piensos se toman de tablas confeccionadas por especialistas en Nutrición Animal de la República de Cuba. Los rangos de pérdidas y coeficientes de pérdidas se toman en las 13 fábricas existentes en el país. El surtido total de piensos considerados es el producido por la Unión de Empresas del Combinado Avícola Nacional, donde se realizan no solo piensos destinados a la Avicultura.

La investigación se caracterizó por los siguientes aspectos generales:

- Estudio de la documentación actualizada nacional vigente sobre producción de piensos en la República de Cuba. Además, se efectuaron entrevistas al personal implicado en las distintas operaciones de manufactura y se realizaron las observaciones correspondientes con los objetivos de conocer, de forma real, los procesos u operaciones y verificar los resultados del estudio de la documentación y entrevistas.
- En un período de tiempo superior a tres años se entrevistaron y observaron todos los formuladores y jefes de producción de las fábricas del país.
- Se realizaron visitas de trabajo a todas las fábricas encaminadas a determinar las características de cada una de ellas en cuanto a tecnología disponible, ejecución y control del proceso de manufactura. Dentro de la tecnología se incluyen las computadoras personales disponibles para llevar a cabo la formulación y control de la producción, incluyéndose también los laboratorios de control de la calidad existentes. Cada visita fue acompañada de una guía de observación dirigida al proceso de formulación y operaciones fundamentales de manufactura: recepción de MP (ingredientes), ventas de productos terminados, operaciones de molienda y mezclado (incluye área de premezclas) y controles de calidad.
- Periódicamente se efectuaron reuniones de trabajo con los formuladores del oriente, centro y occidente del país, culminando con los denominados Talleres – Conferencias Nacionales de Formulación.
- Se realizó un estudio sobre pérdidas en los ingredientes dentro del proceso de manufactura y su influencia dentro del proceso de formulación.
- Cuando se producen productos que representan el resultado de la combinación de distintos ingredientes componentes debía cumplirse que el peso de una unidad de producto final es igual a la suma de los respectivos pesos componentes, y más aun cuando no existen pérdidas por reacciones químicas de los componentes. Este detalle ejerce una influencia crucial en el cálculo de la fórmula, en la calidad del producto final y en la economía de la fábrica o empresa. Para los productores la tarea de la determinación exacta de este parámetro es imposible; un ingrediente que en un momento determinado se ha comportado de cierta forma, puede no tener el mismo comportamiento en fechas posteriores. También, pueden existir cambios significativos debido a problemas industriales y otros factores: humedad, presión, temperatura, etc.; por lo que las variaciones que pueden ocurrir entre fábricas, en los mismos ingredientes, suelen ser distintas y ocurren con gran frecuencia.

Es obvio que a cada ingrediente estará asociado un valor bruto (x_B) y un valor neto (x_N). El costo de x_N dependerá de x_B , por tanto, resulta ser un grave error conceptual plantear la función objetivo como

$$\text{Min}Z = \sum_{k=1}^n p_k x_k \text{ porque los valores } x_k \text{ representan cantidades netas } (x_N) \text{ del ingrediente "k" y } p_k \text{ es el}$$

costo unitario de unidades brutas (x_B) del ingrediente "k". Así, se puede definir el coeficiente de pérdida

de un ingrediente "j" (Γ_j) mediante la relación $\Gamma_j = \frac{x_B - x_N}{x_B} \cdot 100$, con $x_B \geq x_N$.

Si se conoce que el valor exacto de Γ_j se encuentra en un intervalo y se desea obtener los valores aproximados, así como los errores absolutos y relativos se procede según Danílina *et al.* (1990):

- Se toma como valor aproximado γ_j el centro del intervalo, es decir $\gamma_j = \frac{\Delta_{\gamma_j}}{2}$, teniendo en consideración que el intervalo es $[0; \Delta_{\gamma_j}]$.

- Se toma como error absoluto Δ_{γ_j} la mitad de la longitud del intervalo, es decir $\frac{\Delta_{\gamma_j}}{2}$.

Cada fábrica se encarga de la determinación de δ_{γ_j} para cada ingrediente, pero también pueden decidir tomar un valor global común para todos los ingredientes, representando esta última decisión un método

más cómodo pero menos exacto. Es necesario advertir que el conocimiento del intervalo donde se encuentra el valor exacto del coeficiente de pérdida de un ingrediente no excluye su carácter impreciso sino todo lo contrario. De esta forma el peso bruto de un ingrediente "j" depende de su coeficiente de pérdida Γ_j y variará también en un intervalo, resultando ser una magnitud imprecisa.

En virtud de que los valores de p_k aparecen en \$/ton y los valores de x_k se expresarán en kg, se debe expresar p_k en \$/kg, lo que se logra mediante la división por 1000. Entonces, la función de costo total a

minimizar es $\text{Min}Z = 0,1 \sum_{k=1}^n \frac{p_k x_k}{100 - \Gamma_k}$, expresión más acabada y exacta que las hasta hoy empleadas.

- Para la construcción final de los modelos se tomó en consideración las exposiciones de Dantzig (1974), Simonard (1981), Chiang (1990), Cadenas y Verdegay (1999), Cadenas *et al.* (2001), Lieberman y Millier (2005), Morales (2005), Otero *et al.* (2006) y Morales (2008).
- La implementación final de los modelos con datos imprecisos en la formulación de alimentos para animales se realizó en C++ Builder 6.0 según Morales (2008). Para los cálculos se empleó fundamentalmente la versión 5.0 del sistema ForCan diseñado y programado para tales propósitos. ForCan es un sistema informático sobre Windows que comenzó a desarrollarse a partir del año 2008 en la República de Cuba, actualmente se encuentra disponible la versión 5.0 que involucra más de 100 combinaciones o formas posibles para obtener la fórmula del alimento balanceado con empleo de datos imprecisos en los diferentes componentes del modelo matemático. Además, dentro de su entorno de trabajo, ForCan realiza, entre otras, las denominadas ampliaciones de premezclas, órdenes finales de fabricación y consumos planificados y reales de ingredientes por producciones efectuadas con el correspondiente control del inventario en los almacenes de materias primas, pudiéndose controlar la actividad de formulación de fábricas enlazadas a través de la red informática; el número total de fábricas para la realización del control depende de la capacidad disponible del hard disk de la máquina que realiza funciones de servidor.

Se calculan un total de 196 fórmulas y los costos de las producciones correspondientes con optimización a costo mínimo con precisión e imprecisión en diferentes componentes del modelo correspondiente. En el primero de los modelos se introduce, en el objetivo, el coeficiente de pérdida (Γ_k) de los ingredientes de forma precisa para lograr un costo próximo a la realidad por concepto de ingredientes en fórmula. Las funciones objetivo de los distintos modelos aplicados están sujetas al siguiente sistema de restricciones lineales: (a) especificaciones nutricionales establecidas para los animales, (b) límites de inclusión de ingredientes en fórmula, (c) medicamentos en la ración, (d) posibles relaciones de porcentaje entre ingredientes de la ración y (e) peso final de la mezcla. Los modelos aplicados se relacionan a continuación.

- *Modelo I*: Modelo clásico a costo mínimo e inclusión de coeficiente de pérdida (Γ_k) preciso en el objetivo.

$$\text{Min}Z = 0,1 \sum_{k=1}^n \frac{p_k x_k}{100 - \Gamma_k}; \quad x_k \geq 0 \quad (1)$$

Sujeto a:

$$(a) \quad 10w_i \leq 0,01 \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq 10W_i; \quad i = \overline{1, s}; \quad (b) \quad 10l_k \leq x_k \leq 10L_k; \quad k = \overline{1, n}; \quad (c) \quad x_k = 0,1 \frac{\Phi_r}{\theta_r}; \quad r = \overline{1, t}; \quad t < n;$$

$$(d) \quad \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k P) x_k \{ \leq; = \geq \} 0; \quad (e) \quad \sum_{k=1}^n x_k = 1000$$

- *Modelo II*: Modelo a costo mínimo con imprecisión sólo en el objetivo.

$$\text{Min}Z = 0,1 \sum_{k=1}^n \Lambda_k^f(p_k; \Gamma_k) x_k; \quad x_k \geq 0 \quad (2)$$

Sujeto a las condiciones (a) - (e) del *Modelo I*.

- *Modelo III*: Modelo a costo mínimo con precisión en el objetivo e imprecisión en el nutriente Proteína Bruta Total en los ingredientes que aportan este nutriente.

$$\text{Min}Z = 0,1 \sum_{k=1}^n \frac{p_k x_k}{100 - \Gamma_k}; \quad x_k \geq 0 \quad (3)$$

Sujeto a: $10w_i \leq 0,01 \sum_{k=1}^n \Phi_i^f(a_{ik}) x_k \leq 10W_i; i = \overline{1, s}$ y condiciones (b) - (e) de los *Modelos I y II*.

- *Modelo IV*: Modelo a costo mínimo, con imprecisión en el nutriente Proteína Bruta Total en los ingredientes que aportan este nutriente e imprecisión en el objetivo.

$$\text{Min}Z = 0,1 \sum_{k=1}^n \Lambda_k^f(p_k; \Gamma_k) x_k; \quad x_k \geq 0 \quad (4)$$

Sujeto a: $10w_i \leq 0,01 \sum_{k=1}^n \Phi_i^f(a_{ik}) x_k \leq 10W_i; i = \overline{1, s}$ y condiciones (b) - (e) de los *Modelos I, II y III*.

El significado de los componentes de los modelos es como sigue: x_k representa la cantidad neta, en kilogramos, del ingrediente "k" a incluir por cada tonelada de pienso; "n" es el total de ingredientes en la ración; p_k es el precio de la tonelada del ingrediente "k"; w_i y W_i son los límites inferior y superior del requerimiento nutricional i-ésimo del pienso; a_{ik} : aporte del nutriente "i" que brinda una unidad del ingrediente "k"; $\Phi_i^f(a_{ij})$ son números fuzzy (trapezoidales) normalizados asociados a a_{ik} ; $\Lambda_k^f(p_k; \Gamma_k)$ son números fuzzy (triangulares) asociados a p_k y Γ_k del ingrediente "k"; l_k y L_k representan el límite inferior y superior de inclusión del ingrediente "k" (en %); x_r es la cantidad neta (en kilogramos) del medicamento "r" con concentración θ_r ($0 < \theta_r \leq 100$) y dosis indicada Φ_r ($\Phi_r > 0$, en g/Ton) a incluir por tonelada de pienso y "t" es el total de medicamentos en fórmula; P es el porcentaje que indica el usuario de relación entre ingredientes componentes del pienso.

Se aprecia que las funciones objetivo son todas a costo mínimo, en los casos de los *Modelos II y IV* sufren cambios radicales porque se continúa minimizando el costo pero se introducen números fuzzy (imprecisión) en los coeficientes económicos de los ingredientes; la aparición del coeficiente 0,1 en las mismas obedece a que con la introducción de Γ_k la cantidad de ingrediente bruto se calcula según la expresión $\frac{100x_k}{100 - \Gamma_k}$, al multiplicar esta expresión por p_k y dividirla por 1000 se obtiene el costo del kilogramo de ingrediente "k". Cuando se trate del caso de imprecisión en el objetivo producto a Γ_k se procede de forma similar.

La restricción (a) tiene, al igual que las funciones objetivo, carácter clásico en los *Modelos I y III*, pero en los *Modelos II y IV* sufre el sustancial cambio de imprecisión (números fuzzy) en los coeficientes de los aportes nutricionales de los ingredientes, todo lo cual implica que el modelo tome un carácter impreciso. La restricción (b), presente en todos los modelos, tiene un carácter clásico; esta clasificación significa que también es empleada por modelos clásicos del Problema de la Dieta anteriores a los propuestos. El caso de la restricción (c) se justifica porque con ella se convierte una dosis indicada de medicamento, con concentración de producto activo conocida, a unidades de peso en mezcla de forma directa.

La restricción (d), que aparece en todos los modelos, surge en virtud de que cuando uno o más ingredientes (conjunto A) representan un porcentaje P de uno o más ingredientes que también figuran en la mezcla (conjunto B), se pueden establecer las relaciones:

- $\text{Peso}(A) = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k$; $\beta_k = 1$ si x_k es un elemento de A y $\beta_k = 0$ si x_k no es un elemento de A.
- $\text{Peso}(B) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$; $\alpha_k = 1$ si x_k es un elemento de B y $\alpha_k = 0$ si x_k no es un elemento de B.

Con auxilio de las relaciones que definen $\text{Peso}(A)$ y $\text{Peso}(B)$ se obtiene la expresión $\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k P) x_k \{ \leq; \geq \} 0$

para un porcentaje P que se indica por el usuario.

La restricción (e) se justifica porque los núcleos minerales y vitamínicos, premezclas, sal común, medicamentos y otros aditivos se indican, según el animal específico, por tonelada de piensos, por lo que resulta lógico que el modelo para el cálculo de la fórmula debe responder a esta exigencia, es decir, la suma total de los pesos de los ingredientes debe resultar una tonelada (1000kg).

La Tabla 1 contiene la forma analítica general de la función de pertenencia $\mu(x)$ de los números fuzzy (triangulares y trapezoidales) que se utilizaron en el estudio y las Figuras 1 y 2 muestran la representación gráfica de los que figuran en la Función Objetivo. El Error de Estimación δ_k para el valor determinista del Coeficiente de Pérdida Γ_k en el intervalo $[r_i; R_i]$ se calcula según Danílina (1990). Cuando se considera que el ingrediente no tiene pérdida ($\Gamma_k = 0$) se genera el número que aparece en la Figura 1. Si el ingrediente tiene pérdida ($\Gamma_k \neq 0$) se genera el número que aparece en la Figura 2. En cualquier caso, luego de realizar un estudio previo, el valor de Γ_k lo determina el usuario. El calificativo normalizado se refiere a que todos los números poseen $\text{Alt}(A) = 1$. En la Figura 3 se muestra la forma de los números fuzzy (trapezoidales y normalizados) que se emplean para la variación del aporte en el nutriente a_{ik} de ingredientes (Proteína Bruta Total); el valor a_{ik} es el que se reporta en tablas y $[a_{ik}^{(0)}; a_{ik}^{(1)}]$ es el Soporte (Sop) del número que se considera para el estudio.

Los precios (p_k), en USD (\$) por tonelada, de los ingredientes que se utilizaron se relacionan a continuación: Núcleo Mineral [\$832.80], Núcleo Vitamínico Ponedora [\$1992.80], Núcleo Vitamínico Inicio Polluelo [\$4124.10], Núcleo Vitamínico Crecimiento Avícola [\$2190.10], Núcleo Vitamínico Reproductor Avícola [\$4119.30], Premezcla Pavo [\$943.70], Premezcla Único Porcino [\$1691.00], Premezcla Vaca Lechera [\$1245.70], Premezcla Caballos TP [\$1211.30], Premezcla Ceba Terneros [\$1551.50], Premezcla Toros Inseminación [\$1083.70], Premezcla Ovino-Caprino [\$1800.00], Premezcla Tilapia [2891.90], Premezcla Ceba A [\$1994.60], Premezcla Perros [\$1738.20], Premezcla Inicio Terneros [\$2825.00], Premezcla Avícolas [\$1285.40], Premezcla Ganso/Patos [\$2363.30], Premezcla Vitamínica Ceba II [\$2672.00] y Premezcla Conejos [\$994.80], Sal Común [\$28.45], Soya

42 [\$474.00], Fosfato 17.5 [\$287.00], Harina de Pescado 64 [\$897.00]; Carbonato de Calcio [\$16.50], Coccicán [\$8701.60]; Cloruro de Colina [\$1464.00]; Sulfato de Cobre [\$1221.80], Oxitetraciclina [\$1850.00], Metionina DL[\$6170.00], Girasol 29 [\$549.00], Trigo 10 [\$420.00], Maíz 7 [\$191.80], Aceite Vegetal [\$889.00], Cebada [\$520.00], Soya 43,5 [\$471.00], Fosfato Monocálcico [\$1385.00] y Avena 10,5 [\$470.00].

Tabla 1: Funciones de pertenencia de números fuzzy

Números Triangulares	Números Trapezoidales
$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-r_k}{c_k-r_k} & \text{si } r_k \leq x \leq c_k \\ 1 & \text{si } x = c_k \\ \frac{R_k-x}{R_k-c_k} & \text{si } c_k \leq x \leq R_k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$	$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-r_i}{r_i-\bar{c}_i} & \text{si } r_i \leq x \leq \bar{c}_i \\ 1 & \text{si } \bar{c}_i \leq x \leq \bar{c}_i \\ \frac{R_i-x}{R_i-\bar{c}_i} & \text{si } \bar{c}_i \leq x \leq R_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

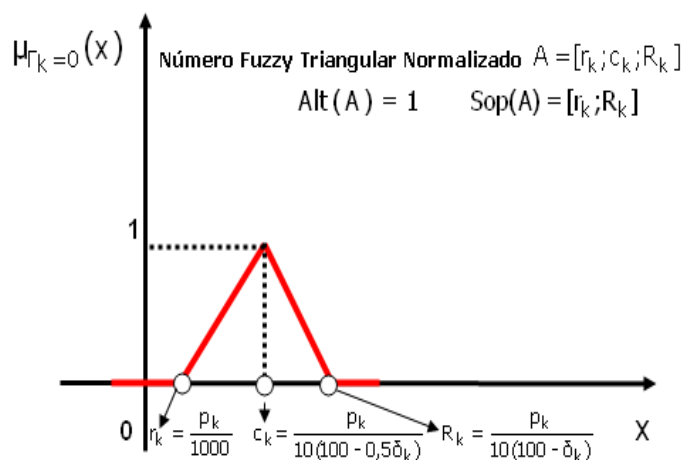


Fig. 1: Número fuzzy que se genera para ingredientes con coeficiente de pérdida cero.

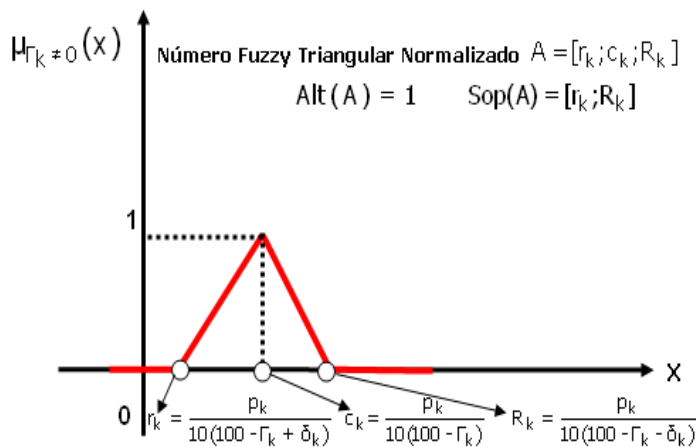


Fig. 2: Número fuzzy que se genera para ingredientes con coeficiente de pérdida distinto de cero.

Los coeficientes de pérdidas (Γ_k) por ingredientes y su posible rango de variación ($\Delta\Gamma_k$), así como los rangos de variación correspondientes son expuestos en la Tabla 2. La Tabla 3 contiene los valores de la Proteína Bruta Total (a_{ik}) y los rangos de variación por ingredientes (Δa_{ik}). El surtido general de productos que se tomó para la investigación y las producciones correspondientes se presenta en la Tabla 4.

Tabla 2: Ingredientes, coeficientes de pérdida y rangos de variación.

Ingredientes	Γ_k (%)	$\Delta\Gamma_k$ (%)	Ingredientes	Γ_k (%)	$\Delta\Gamma_k$ (%)
Sal Común	0,50	0,50-1,00	Carbonato de Calcio	1,50	1,50-2,00
Soya 42	2,50	2,50-3,00	Coccicán	-	-
Fosfato 17,5	1,00	1,00-1,50	Cloruro de Colina	0,50	0,25-0,50
N. M	0,25	0,25-0,50	Sulfato de Cobre	-	-
N. V. Ponedora	0,25	0,25-0,50	Oxitetraciclina	-	-
N. V. Inicio Polluelo	0,25	0,25-0,50	Metionina DL	0,50	0,50-0,75
N. V. Crec. Avícola.	0,25	0,25-0,50	Girasol 29	3,00	2,50-3,50
N.V. Rep. Avícola	0,25	0,25-0,50	Trigo 10	3,00	2,50-3,50
Premezcla Pavo	0,25	0,25-0,50	Maíz 7	3,00	2,50-3,50
Prem. U. Porcino	0,25	0,25-0,50	Aceite Vegetal	0,30	0,30-0,75
Prem. Vaca Lechera.	0,25	0,25-0,50	Prem. Conejos	0,25	0,25-0,50
Prem. Caballos TP	0,25	0,25-0,50	Cebada	3,00	2,50-3,50
H. de Pescado 64	1,00	1,00-1,50	Soya 43,5	2,50	2,50-3,00
Prem. Ceba Terneros	0,25	0,25-0,50	Prem. Perros	0,25	0,25-0,50
Prem. Toros Inseminación	0,25	0,25-0,50	Prem. Inicio Terneros	0,25	0,25-0,50
Prem. Ovino-Caprino	0,25	0,25-0,50	Prem. Avícolas	0,25	0,25-0,50
Prem. Tilapia	0,25	0,25-0,50	Prem. Gansos/Patos	0,25	0,25-0,50
Prem. Ceba A	0,25	0,25-0,50	Prem. Vitamínica. Ceba II	0,25	0,25-0,50
Fosfato Monocálcico	1,00	1,00-1,50	Avena 10,5	3,00	2,50-3,50

N. M: Núcleo Mineral; N. V: Núcleo Vitamínico; Prem: Premezcla; Prem. Vit: Premezcla Vitamínica.

Γ_k : Coeficiente de pérdida del ingrediente k ; $\Delta\Gamma_k$: Rango de variación para Γ_k .

En la Tabla 5 se exponen ejemplos de números fuzzy obtenidos a partir de las cuestiones teóricas expuestas y los datos de la investigación para algunos de los ingredientes que intervinieron en el proceso investigativo.

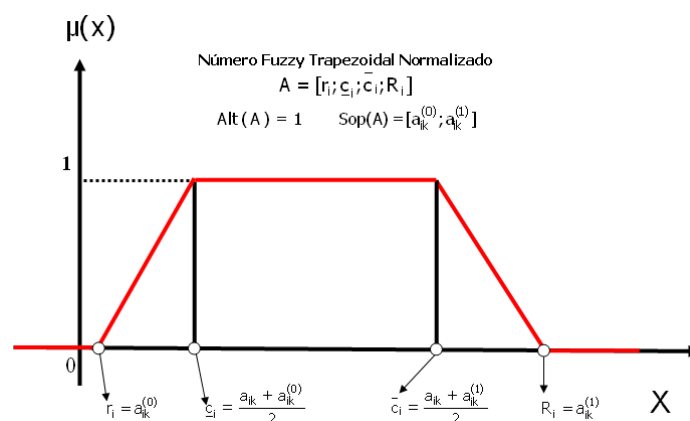


Fig. 3: Número fuzzy que se genera si se toma en consideración el intervalo de variación de un nutriente.

Los métodos de transformación de los modelos y algoritmos que se utilizan para obtener la solución son los expuestos en Cadenas y Verdegay (1999), donde aparece una recopilación lo suficientemente amplia sobre el tema.

Tabla 3: Ingredientes, aporte en Proteína Bruta Total y rangos de variación

Ingredientes	PBT (a_{ik}) (%)	Δa_{ik} (%)	Ingredientes	PBT (a_{ik}) (%)	Δa_{ik} (%)
Soya 42	42,00	41,00-43,00	Soya 43,5	43,50	42,50-44,00
Cebada	10,00	9,00-11,00	Girasol 29	29,00	27,50-30,00
Maíz 7	7,00	6,50-7,50	Trigo 10	10,00	9,00-11,00
Avena 10,5	10,5	9,50-11,00	H. de Pescado 64	64,00	63,00-65,00

PBT: Proteína Bruta Total; Δa_{ik} : Intervalo o rango de variación del aporte a_{ik} .

Tabla 4: Surtido de productos y valores de producciones

Genéricos	Específicos*
Avícolas	Ponedoras Fase I (16 000), Ponedoras Fase I-A (24 000), Ponedoras Fase II (28 550), Ponedoras Fase II-A (10 000), Reproductor Hembra Ligero (20 000), Reproductor Hembra Ligero-A (15 000), Inicio de Polluelos (15 000), Inicio de Polluelos-A (10 000), Crecimiento Pollonas (78 550), Crecimiento Pollonas-A (10 000), Inicio de Ceba (10 000), Inicio de Ceba-A (6 000), Acabado de Ceba (12 000), Acabado de Ceba-A (20 000), Reproductor Hembra Pesado (1 050), Inicio Ganso – Patos (500), Desarrollo Ganso – Patos (600), Mantenimiento Ganso – Patos (400), Reproductor Ganso – Patos (400), Preincio Pavo (400), Inicio Pavo (600), Crecimiento Pavo (400), Ceba Pavo (200), Mantenimiento Pavo (250), Reproductor Pavo (500), Inicio Faisán – Guineo (650), Crecimiento Faisán – Guineo (700), Reproductor Faisán – Guineo (350), Inicio Codorniz (300), Crecimiento Codorniz (350), Reproductor Codorniz (250).
Porcinos	Único Comercial (450), Preincio (250), Inicio (200), Destete (800), Crecimiento (250), Gestación (250), Lactación (350), Ceba (450).
Vacunos	Iniciar Terneros (600), Ceba Terneros (500), Vaca Lechera Los Naranjos (600), Toros de Inseminación Artificial (300).
Otros	Ovino Caprino Lactante (400), Caballos Todo Propósito (300), Ceba Tilapia (100), Conejos Lactante (150), Perros Todo Propósito (100).

* Los valores entre paréntesis indican producciones en toneladas.

Tabla 5: Coeficientes de pérdida e intervalos de variación, aportes en Proteína Bruta Total e intervalo de variación y números fuzzy generados en cada caso de algunos ingredientes

Ingrediente	Γ_k (%)	$\Delta\Gamma_k$ (%)	Número Fuzzy $\Lambda_k^f(p_k; \Gamma_k)$	PBT a_{ik} (%)	Δa_{ik} (%)	Número Fuzzy $\Phi_i^f(a_{ik})$
N. Vit. Ponedora	0,25	0,25-0,5	[1,9903;1,9978;2,0053]			
P. Vaca Lechera	0,25	0,25-0,5	[1,2441;1,2488;1,2535]			
Sal Común	0,50	0,5-1,0	[0,0284;0,0286;0,0288]			
Coccicán	0,00	-	-	-	-	-
C. de Colina	0,25	0,25-0,5	[1,4622;1,4677;1,4732]			
Aceite Vegetal	0,30	0,3-0,75	[0,887;0,8917;0,8964]			
Fosfato Monocálcico	1,00	1,0-1,5	[1,3815;1,399;1,4169]			
Metionina DL	0,50	0,5-0,75	[6,1623;6,201;6,2402]			
Maíz 7	3,00	2,5-3,5	[0,1918;0,1977;0,204]	7	6,5-7,5	[7,0;6,75;7,25;7,5]
Avena 10,5	3,00	2,5-3,5	[0,47;0,4845;0,5]	10,5	9,5-11	[9,5;10;10,75;11]
Trigo 10	3,00	2,5-3,5	[0,42;0,433;0,4468]	10	9-11	[9;9,5;10,5;11]
H. de Pescado 64	1,00	1,0-1,5	[0,8948;0,9061;0,9176]	64	63-65	[63;63,5;64,5;65]
Soya 42	2,50	2,5-3,0	[0,4728;0,4862;0,5003]	42	41-43	[41;41,5;42,5;43]
Girasol 29	3,00	2,5-3,5	[0,549;0,566;0,584]	29	27,5-30	[27,5;28,25;29,5;30]

$\Delta\Gamma_k$: Intervalo de variación del Coeficiente de Pérdida Γ_k ; PBT: Contenido en Proteína Bruta Total; Δa_{ik} : Intervalo de variación del aporte a_{ik} . Los medicamentos no se someten a estos cálculos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados económicos finales de los cálculos donde se toman en consideración las producciones planteadas por específicos se presentan en las Tablas 6 y 7. Puede apreciarse que, en todos los casos, los Modelos *II*, *III* y *IV* reportan un costo final de las fórmulas inferior al *Modelo I* (modelo con datos precisos en todos sus componentes), lo que indica que cuando se introduce imprecisión en algún componente del modelo el costo disminuye. Este hecho se acentúa en el caso del *Modelo IV*, donde aparecen, excepto en la matriz de los requerimientos de especificaciones nutricionales de los piensos, imprecisiones en el resto de los componentes: matriz de los coeficientes tecnológicos o de conversión (aportes a_{ik} de nutrientes de los diferentes ingredientes y en especial imprecisión en los niveles de Proteína Bruta Total de los diferentes ingredientes donde se considera la misma) y en el vector o matriz fila de los coeficientes económicos (posibles rangos o intervalos de variación del Coeficiente de Pérdida Γ_k).

Al hecho expuesto en el párrafo anterior debe adicionarse que los balances nutricionales alcanzados para el surtido total con la aplicación del Modelo IV son equivalentes a los que se logran con el resto de los modelos y en especial respecto al *Modelo I* que resulta clásico, aunque en él aparezca incluido el coeficiente de pérdida Γ_k de los ingredientes en el objetivo, pero esta aparición posee un carácter determinista, todo lo cual produce que, si existe, se encuentre una única solución del problema.

Tabla 6: Resultados económicos del cálculo de fórmulas en piensos Avícolas y Vacunos

Específico	Costos por tonelada obtenidos con el cálculo de las fórmulas utilizando los diferentes modelos.				Δ (\$)	Pérdidas (\$)
	Modelo I (\$)	Modelo II (\$)	Modelo III (\$)	Modelo IV (\$)		
Ponedora I	369.56	368.71	363.24	362.40	7.16	114 560.00
Ponedora I-A	309.58	308.89	304.55	303.87	5.71	137 040.00
Ponedora II	301.94	301.25	298.09	297.41	4.53	129 331.50
Ponedora II-A	282.64	281.98	277.48	276.83	5.81	58 100.00
R. H. Ligero	300.50	299.79	295.46	294.77	5.73	114 600.00
R. H. Ligero-A	291.33	290.66	286.17	285.51	5.82	87300.00
I. Polluelo	430.80	429.81	427.36	426.38	4.42	66 300.00
I. Polluelo-A	344.91	344.12	337.83	337.05	7.86	78 600.00
C. Pollonas	317.02	316.24	316.20	315.42	1.60	61 680.00
C. Pollonas-A	307.59	306.82	306.86	306.10	1.49	59 600.00
I. Ceba Avícola	505.17	504.13	497.66	497.01	8.16	81 600.00
I. Ceba Avícola-A	485.79	484.79	478.46	477.47	8.32	49 920.00
A. Ceba Avícola	405.68	404.83	399.32	398.47	7.21	86 520.00
A. Ceba Avícola-A	354.42	353.69	348.63	347.91	6.51	130 200.00
R. H. Pesado	325.77	325.07	324.45	323.75	2.02	1 313.00
R. M. Pesado	274.78	274.14	271.06	270.42	4.36	1 744.00
I. Ganso -Patos	336.77	335.98	332.65	331.86	4.91	2 455.00
D. Ganso - Patos	385.77	385.00	382.97	382.21	3.56	2 136.00
M. Ganso - Patos	353.35	352.49	353.35	352.49	0.86	344.00
R. Ganso - Patos	295.99	295.30	291.04	290.36	5.63	2 252.00
Preincio Pavo	437.06	436.41	431.30	430.66	6.40	2 560.00
Inicio Pavo	382.95	382.34	376.73	376.12	6.83	4 098.00
Crecimiento Pavo	359.76	359.15	355.63	355.02	4.74	1 896.00
Ceba Pavo	332.86	332.29	332.86	332.29	0.57	114.00

Específico	Costos por tonelada obtenidos con el cálculo de las fórmulas utilizando los diferentes modelos.				Δ (\$)	Pérdidas (\$)
	Modelo I (\$)	Modelo II (\$)	Modelo III (\$)	Modelo IV (\$)		
Mtto. Pavo	349.20	348.63	349.20	348.63	0.57	142.50
R. Pavo	285.21	284.68	281.02	280.50	4.71	2 355.00
I. Faisán-Guineos	410.20	409.59	402.22	401.61	8.59	5 583.50
C. Faisán -Guineos	343.70	343.13	340.77	340.20	3.50	2 450.00
R. Faisán-Guineos	313.57	313.01	313.43	312.87	0.70	245.00
I. Codorniz	407.13	406.50	400.56	399.94	7.19	2 157.00
C. Codorniz	362.50	361.92	358.61	358.03	4.47	1 564.50
R. Codorniz	342.97	342.40	337.32	336.76	6.21	1 552.50
Iniciar Terneros	320.14	319.33	314.43	313.63	6.51	3 906.00
Ceba Terneros	269.76	269.07	264.83	264.16	5.60	2 800.00
Vaca Lechera LN	309.07	308.29	303.78	303.00	6.07	3 642.00
T. Inseminación Artificial	271.44	270.75	266.54	265.86	5.58	1 674.00

Δ : Indica la diferencia entre el costo de la fórmula según el Modelo I y el Modelo IV.

Tabla 7: Resultados económicos del cálculo de fórmulas en piensos Porcinos y otros piensos

Específico	Costos por tonelada obtenidos con el cálculo de las fórmulas utilizando los diferentes modelos.				Δ (\$)	Pérdidas (\$)
	Modelo I (\$)	Modelo II (\$)	Modelo III (\$)	Modelo IV (\$)		
Único Comercial Porcino	296.35	295.62	292.34	291.63	4.72	2 124.00
Preinicio Porcino	423.21	422.19	421.40	420.38	2.83	707.50
Inicio Porcino	421.64	420.62	419.80	418.79	2.85	570.00
Destete Porcino	423.13	422.10	422.39	421.36	1.77	1 416.00
Crecimiento Porcino	310.36	309.60	306.71	305.96	4.40	1 100.00
Gestación Porcino	256.38	255.75	251.82	251.21	5.17	1 292.50
Lactación Porcino	280.79	280.10	275.89	275.21	5.58	1 953.00
Ceba Porcino	278.94	278.25	274.08	273.41	5.53	2 488.50
Ovino Caprino Lactante	270.64	269.95	265.70	265.02	5.62	2 248.00
Caballos T. P	307.52	306.87	302.78	302.13	5.39	1 617.00
Ceba Tilapia	528.90	527.94	528.16	527.19	1.71	171.00
Conejos Lactante	377.08	376.40	375.04	374.36	2.72	408.00
Perros T. P	511.45	510.29	505.42	504.27	7.18	718.00

Δ : Indica la diferencia entre el costo de la fórmula según el Modelo I y el Modelo IV.

La Tabla 8 contiene el resumen de pérdidas generales por Genérico (Avícolas, Porcinos, Vacunos y otros piensos) para las producciones objeto de análisis expuestas en la Tabla 4. Puede notarse que la mayor pérdida tiene lugar en los piensos Avícolas producto a que las mayores partidas de producción tienen lugar en los mismos.

Tabla 8: Cuantificación de pérdidas por Genérico

Genéricos	Pérdida (\$)
Avícolas	1 290 313.50
Porcinos	11 651.50
Vacunos	12 022.00
Otros	5 162.00
Total	1 319 149.00

Los análisis de Correlación que se llevan a cabo a partir de los datos expuestos en las Tablas 6 y 7 muestran la relación existente entre los modelos (Coeficiente de Correlación 0,999 y 1), probándose con ello que:

- Las concepciones teóricas referidas a las transformaciones de modelos con datos imprecisos en modelos de Programación Lineal son válidas.
- Los modelos con datos imprecisos del Problema de la Dieta son generados y transformados por ForCan de forma científicamente factible.
- La dependencia matemática y nutricional entre los modelos es fuerte.

Los resultados obtenidos con STATGRAPHICS Plus sobre el análisis de regresión simple y múltiple del *Modelo IV* respecto al resto de los modelos revelan que, para el caso de regresión simple, hay relación estadísticamente significativa entre el *Modelo IV* y el resto (nivel de confianza del 99% y R-cuadrado superior al 99% en todos los casos) para el modelo de regresión seleccionado. No obstante, en virtud de que R-cuadrado indica que el modelo seleccionado explica en un porcentaje determinado la variabilidad en el *Modelo IV*, el modelo que mejor ajuste proporciona es el lineal (R-cuadrado = 99,8994%):

$$\text{Modelo IV} = -3,52926 + 0,996362 * \text{Modelo I} \quad (4)$$

En el caso de Regresión Múltiple el STATGRAPHICS Plus proporciona el siguiente resultado:

$$\text{Modelo IV} = -0,103561 - 0,924948 * \text{Modelo I} + 0,931845 * \text{Modelo II} + 0,993216 * \text{Modelo III} \quad (5)$$

En este caso, el estadístico R-cuadrado indica que el modelo explica un 99,9999% la variabilidad del *Modelo IV*.

El estadístico R-cuadrado ajustado (más conveniente para comparar modelos con diferentes números de variables independientes) es 99,9999%. El error estándar de la estimación (ESE = 0,0520216) muestra la desviación típica de los residuos, pudiéndose utilizar el mismo para construir los límites de predicción para nuevas observaciones. El Error Absoluto Medio (MAE) de 0,0223251 es el valor medio de los residuos. El Estadístico Durbin-Watson (DW) obtenido posee el valor de 2.0886 ($p = 0,3022 > 0,05$), lo que indica que no hay indicio de autocorrelación serial en los residuos. Como todos los p-valores en las variables independientes son iguales a 0 (menor que 0,01) no resulta conveniente excluir ninguna de las variables del modelo.

Independientemente de que las fórmulas de específicos diferentes poseen distintas especificaciones nutricionales, contenidos en nutrientes diferentes y objetivos zootécnicos variados, los costos, como resultado del empleo de un determinado modelo para la formulación, pudieran ser iguales. La prueba Ji – cuadrado, realizada con el SPSS, muestra una probabilidad calculada (p_c) equivalente a 0; ello significa que las discrepancias entre las frecuencias observadas y las esperadas se atribuyen al azar y, en este caso particular, resultan ser las mismas. De esta forma, es factible concluir que los costos de las fórmulas encontradas con el empleo de los modelos propuestos siempre serán diferentes y dependerá del modelo empleado para su determinación. En el caso de la prueba de K - S (prueba de Kolmogorov y Smirnov con $N > 35$) se tiene que

$$D_t = \frac{1,36}{\sqrt{N}} = \frac{1,36}{\sqrt{49}} \approx 0,1943 \text{ (teórico). Los resultados obtenidos con el sistema SPSS de la prueba K-S, utilizando}$$

como distribución de contraste la normal, muestran que $D_c = 0,120$ (para los *Modelos I, II y IV*) y $D_c = 0,119$ (para el *Modelo III*); en ambos casos resulta ser $D_c < D_t$ lo cual indica que los costos de producción obtenidos a través de los *Modelos I, II, III y IV* siguen una distribución normal.

CONCLUSIONES

A través de modelos de optimización con datos imprecisos en sus diferentes componentes, la formulación de alimentos para animales resulta ser menos costosa que cuando se emplea el modelo clásico tradicional del

Problema de la Dieta, obteniéndose además un número superior de soluciones factibles de un mismo problema y la conservación de especificaciones nutricionales establecidas para cada categoría animal.

REFERENCIAS

1. Cadenas, J.M. & Verdegay, J.L. (1999). Modelos de Optimización con Datos Imprecisos. Universidad de Murcia. España. 169p.
2. Cadenas, J.M., Pelta, D. & Verdegay, J.L. (2001). SACRA. A Smart Decision Support System for Diet Problems in Argentinean Cattle. En G.D. Dounias and D.A Linkens (Eds): Adaptive Systems and Hybrid Computational Intelligence in Medicine. University of the Aegean Press, pp. 65-67.
3. Chiang, A. (1990). Métodos Fundamentales de la Economía Matemática. Editorial Calypso, S.A., México D.F., 732p.
4. D'Alfonso, T.H., Roush, W.B. & Ventura, J.A. (1992a). Least Cost Poultry Rations with Nutrient Variability: A comparison of Linear Programming with a margin of Safety and Stochastic Programming Models. *Poultry Science*, 71, 255-262.
5. D'Alfonso, T.H., Roush, W.B. & Cravener, T.L. (1992b). Reducing feed costs. Stochastic Programming. *Feed Management*, 43 (6), 11-13.
6. Danílina, N.I., Dubróvskaya, N.S., Kvashá, O.P. & Smirnov, G.L. (1990). Matemática de Cálculo. Editorial Mir. Moscú. pp. 1-92.
7. Dantzig, G.B. (1974). Linear Programming and Extension. Princeton. University Press. EE.UU. 627p.
8. Duncan, M.S. (1986). How to deal with ingredient variability. Porc. AFIA Nutr. Symp. Am. Feed Mfg. Assn. Arlington, Va., USA, pp. 67.
9. Duncan, M.S. (1988). Problems of dealing with raw ingredient variability. Recent Advances in Animal Nutrition. University of Nottingham School of Agricultura, USA, pp. 3-11.
10. Lieberman, G.J. & Millier, F.S. (2005). Introducción a la Investigación de Operaciones, 6^{ta} Edición. La Habana, Editorial Félix Varela, 998p.
11. Morales, D.M. (2005). Sistema de ayuda a la decisión para el desarrollo de raciones óptimas en la alimentación animal basado en optimización. La Habana, EDUNIV, p. 318.
12. Morales, D.M. (2008). Modelos y sistema de ayuda a la decisión para producciones industriales de alimento animal en la República de Cuba. La Habana, EDUNIV, p. 167.
13. Otero, J.M., Kakes, A. & Marrero, A. (2006). Modelos de Optimización Continuos. La Habana, Editorial Félix Varela, 2006, pp. 3-317.
14. Roush, W.B. (2004). Stochastic Programming: Addressing Risk Due to Variability. *Aqua Feeds: Formulation & Beyond*, 1 (3), 6-8.
15. Simonard, M. (1981). Programación Lineal. La Habana, Editorial Pueblo y Educación, pp. 1-241.
16. Tozer, P.R. (2000). Least-Cost Ration Formulations for Holstein Dairy Heifers By Using Linear and Stochastic Programming. *J. Dairy Sci.*, 83, 443-451.

17. Zadeh, L.A. (1975a). The Concept of a Linguist Variable and its Applications to Approximate Resoning. Part I. *Information Sciences*, 8 (3), 199-249.
18. Zadeh, L.A. (1975b). The Concept of a Linguist Variable and its Applications to Approximate Resoning. Part II. *Information Sciences*, 8 (3), 301-357.
19. Zadeh, L.A. (1975c). The Concept of a Linguist Variable and its Applications to Approximate Resoning. Part III. *Information Sciences*: 9, 43-80.