

FORMULACIÓN DE ALIMENTO BALANCEADO PARA ANIMALES CON EMPLEO DE MODELOS ESTOCÁSTICOS E IMPRECISOS

FORMULATION OF BALANCED FOOD FOR ANIMALS USING STOCHASTIC AND IMPRECISE MODELS

David M. Morales¹

(1) Universidad "Vladimir I. Lenin", Facultad de Ciencias Técnicas, Departamento de Informática,
Las Tunas - Cuba
(e-mail: moralesrey@ult.edu.cu)

Recibido: 02/08/2011 - Evaluado: 19/10/2011 - Aceptado: 19/01/2012

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo constituyó la construcción de un modelo matemático con datos imprecisos en sus componentes del denominado problema de la dieta. Este modelo es el soporte del sistema informático ForCan, versión ampliada del sistema Piensos- LT, empleado en la República de Cuba en la industria productora de alimento balanceado para animales. Como resultado de la aplicación del modelo se logran fórmulas a más bajo costo y cumplimiento de las especificaciones nutricionales establecidas para diferentes animales que con los denominados modelos de programación estocástica del problema de la dieta desarrollados por investigadores norteamericanos a partir de la década del 80 del siglo pasado. Además, se logró establecer que el empleo de modelos con imprecisión general en sus componentes para el cálculo de la fórmula proporciona un menor consumo de Soya que cuando se utilizan modelos con datos precisos en sus componentes en la mayoría de los casos.

ABSTRACT

The objective of the present work constituted the construction of a mathematical model with inaccurate data in your components of the denominated diet problem. This model is the support of the computer system ForCan, enlarged version of the system Piensos - LT, used in the Republic of Cuba in the balanced food industry for animals. As a result of the application of the pattern lower cost formulas are achieved as well as fulfillment of the nutritional specifications established for different animals in comparison with those denominated problem of the diet models of stochastic programming developed by North American investigators from last century's '80 decade. Also, it was possible to determine that in most cases, the use of models with general components' inaccuracy for the calculation of the formula provides a smaller consumption of Soya than models using precise data in their components.

Palabras clave: datos imprecisos; programación lineal fuzzy; problema de la dieta; modelo matemático
Keywords: imprecise data; fuzzy lineal programming; diet problem; mathematical model

INTRODUCCIÓN

El conocimiento y cuantificación precisa de los niveles de nutrientes en los ingredientes de la ración, infiriéndose su influencia en el producto final, es considerado por varios autores como esencial, pero en la mayoría de las ocasiones no es posible determinarlo con la precisión requerida dada su variabilidad cuestión esta probada, entre otros, por Duncan (1986; 1988), D'Alfonso et al. (1992a; 1992b), Tozer (2000), Roush (2004) y Guevara (2004). En consecuencia su determinación se realiza vía experimental y estadística para realizar la formulación. Si a este hecho real se adiciona la variabilidad en la pérdida de los ingredientes (sobre todo en las que ocupan un gran porcentaje en fórmula, tales como cereales y soya) y tolerancias permisibles de nutrientes en las especificaciones nutricionales de los piensos, la solución matemático – nutricional del problema se torna sumamente engorrosa.

Los modelos de Programación Lineal propuestos en Tozer (2000), tienen la forma:

$$\text{Min} = \{Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j\}; \text{ sujeto a: } \sum_{j=1}^n [a_{ij} - z \sigma_{ij}] x_j \{ \leq; =; \geq \} \theta b_i; i = \overline{1, m} \quad (\text{Modelo I}) \quad (1)$$

$$\text{Min} = \{Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j\}; \text{ sujeto a: } \sum_{j=1}^n [a_{ij} - z \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2}] x_j \{ \leq; =; \geq \} \theta b_i; i = \overline{1, m} \quad (\text{Modelo II}) \quad (2)$$

Donde c_j es el costo del ingrediente "j"; x_j cantidad del ingrediente "j" en la ración; a_{ij} contenido reportado del nutriente "i" en el ingrediente "j"; z nivel de significación demandado (probabilidad); σ_{ij} desviación típica del nutriente "i" en el ingrediente "j"; σ_{ij}^2 varianza del nutriente "i" en el ingrediente "j"; b_i cantidad requerida del nutriente "i" en la ración y θ ($\theta > 1$) es el incremento deseado en la restricción del nutriente "i". Evidentemente, se demuestra que el contenido del nutriente "i" en el ingrediente "j" sigue una distribución normal. Finalmente, sin que medie alguna transformación en los modelos, la búsqueda de la solución de los *modelos I y II* puede realizarse utilizando cualquier algoritmo clásico de Programación Lineal.

Nótese que en los modelos expuestos no se incluyen posibles pérdidas en el proceso de manufactura, por tanto, las cantidades netas y brutas de ingredientes resultan ser iguales (proceso perfecto), tampoco son considerados gastos de producción, tales como salarios, electricidad, transporte y almacenamiento, entre otros. Además, surge la interrogante: ¿puede afirmarse que la solución obtenida es la mejor desde los puntos de vista económico y nutricional?

El sistema informático Piensos-LT Versión 6.0 sobre MSDOS (Morales, 2005), aborda el problema de la influencia de la pérdida en los ingredientes de la ración en el costo final de la fórmula de forma puntual y por criterio de cálculo empleado en el objetivo basándose en la optimización de un modelo con datos imprecisos, pero es necesario el desarrollo de un modelo matemático que aproxime más a éste con las exigencias nutricionales de la ración tomándose en consideración pérdidas en el proceso de manufactura, variabilidad inherente de nutrientes en los ingredientes y tolerancias nutricionales permisibles en las especificaciones nutricionales de los diferentes animales al menor costo posible. En virtud de ello se lleva a cabo un proceso de investigación cuyo objetivo principal consistió en la creación de un modelo matemático con datos imprecisos en sus componentes del denominado Problema de la Dieta soporte del sistema informático ForCan, versión ampliada sobre Windows del sistema Piensos-LT empleado en la República de Cuba en la industria productora de pienso (Morales, 2008).

METODOLOGÍA

La situación en producciones industriales de pienso en fábricas cubanas puede quedar resumida de la siguiente forma: se dispone de un conjunto de ingredientes, de los cuales se conoce, en porcentaje, su contenido aproximado en nutrientes y el intervalo de variación de uno o más de ellos. Son conocidos los requerimientos

nutricionales (mínimos y máximos) de cada específico del surtido (en porcentaje) así como límites de inclusión o niveles de uso (mínimo y máximo) de cada ingrediente por específico, pudiendo surgir la necesidad de establecer relaciones de porcentaje entre dos o más ingredientes de la mezcla. Son conocidas las dosis de medicamentos (en g/ton) indicadas por facultativos, cantidades de los concentrados de vitaminas y minerales a incluir por tonelada en cualquier pienso, el nivel de producción para un determinado pienso, los valores de los coeficientes de pérdida de cada ingrediente y sus respectivos rangos (intervalos) de variación y los precios de ingredientes disponibles, deseándose obtener la fórmula que produzca una combinación de ingredientes disponibles al más bajo costo.

Puesto que el modelo matemático no se desprende de la descripción del problema, siempre resulta provechoso poner en duda cualquiera de los modelos y comparar los resultados de diferentes modelos. En este caso un mismo problema (cálculo de la fórmula) se resolvió varias veces utilizando diversos modelos, lo que permitió apreciar que se produjo una disminución del costo de las fórmulas producto a que, con la introducción de números fuzzy en los diferentes componentes del modelo matemático, se reduce el consumo de cantidades brutas necesarias de ingredientes componentes de la mezcla con parecidos balances nutricionales finales. En cada caso de estudio, como es característico en la Investigación de Operaciones y tras llevar la primera ronda de cálculos, se volvió a estudiar el modelo para introducir correcciones necesarias en el mismo.

En cada caso se estableció una correspondencia entre la precisión del modelo y los detalles que lo caracterizan: precisión necesaria para solucionar el problema e información necesaria y disponible para el trabajo. Se determinó que el modelo matemático para la formulación en la industria resulta ser más exacto y las recomendaciones derivadas de los resultados poseen un mayor grado de utilidad si se asumen imprecisiones en los aportes nutricionales de los ingredientes (en especial de la proteína bruta total), coeficientes de pérdidas de ingredientes y, en los casos necesarios, tolerancias permisibles en los requerimientos nutricionales de los piensos. Para el caso de tolerancias permisibles en los requerimientos nutricionales se aplicó similar procedimiento que el de imprecisión en los aportes nutricionales de ingredientes; es decir, si un requerimiento nutricional posee un límite inferior, superior o ambos y cada uno de ellos puede variar en un intervalo, entonces para ese límite se genera un número fuzzy trapezoidal en función de los valores extremos del intervalo de variación.

Una vez que se obtuvo el modelo matemático se procedió a diseñar y programar el algoritmo de solución. El procedimiento de optimización se programó en C++ Builder Versión 6.0; se tomaron 20 modelos de Programación Lineal con diversos grados de complejidad y se validó el resultados de las soluciones con los sistemas Linear Optimization (LO), Jame Ignizio, ACME Computer Company, Microsoft, 1983, sobre MSDOS; Lindo, Lindo Systems Inc, Chicago, IL, 1992, sobre MSDOS; Corte, Universidad Las Tunas, Víctor Pino, 1997, sobre Windows; QSB, Linear and Integer Programming (Versión 1.0), Yih Long Chang, Department of Systems Engineering United State of American 1996 -1997, sobre Windows; Solver, Universidad Leon Lasdon de Austin (Texas) y Universidad Allan Waren (Cleveland), Microsoft Excel 2003-2007, sobre Windows. Estas validaciones se realizaron con los objetivos de determinar precisión en los cálculos de las variables, análisis posóptimo correspondiente y número de iteraciones para obtener la solución.

Con Statgraphics Plus versiones 2.1 (1994-1996) y 5.1, (1994-2001) Statistical Graphics Corporation se realizó un análisis estadístico respecto al número de iteraciones de los sistemas para encontrar la solución de los modelos de prueba, éste incluyó modelos de Regresión Simple, Exponencial, Inversa de Y, Inversa de X, Doble Inversa, Logaritmo de X, Multiplicativo, Raíz cuadrada de X, Curva S y Raíz Cuadrada de Y. Además, con el sistema Gretl Versión 1.5.1 (2000-2005) de Allin Cottrell, se realizó un análisis con corrección de heteroscedasticidad considerándose que el modelo final de regresión no tuviera constante independiente.

En un período de 40 meses se realizó el diseño y programación de las versiones 1.0 - 5.0 del sistema ForCan en C++ Builder Versión 6.0, validándose sus resultados con el sistema Piensos-LT Versión 6.0, sistema que se emplea en todas las fábricas de piensos del país desde el año 2000 (Morales, 2005). La etapa final del proceso

de modelación culminó con la determinación de todas las fórmulas del surtido con empleo de un modelo con datos precisos en el objetivo pero imprecisión en la proteína bruta total de los ingredientes.

En virtud de que los sistemas informáticos disponibles en el área internacional para resolver el cálculo de la fórmula basan su funcionamiento en modelos del Problema de la Dieta que no tienen en cuenta pérdidas en los ingredientes (o posibles rangos de variación) e imprecisión en nutrientes de ingredientes que intervienen en la mezcla, se optó por realizar este análisis con los sistemas Pienso-LT Versión 6.0 (Morales, 2005) y ForCan Versión 5.0 (Morales, 2008), cuyo diseño y programación aborda también el problema de la solución de modelos matemáticos con datos imprecisos en sus componentes. Los datos correspondientes a límites de inclusión, aportes nutricionales de ingredientes y especificaciones nutricionales de piensos se toman de tablas confeccionadas por especialistas en Nutrición Animal de la Unión de Empresas del Combinado Avícola Nacional de la República de Cuba. Los rangos de pérdidas, coeficientes de pérdidas (Γ_k), variabilidad del nutriente proteína bruta total en ingredientes y producciones realizadas se toman aleatoriamente en las 13 fábricas existentes en el país. Del surtido total de piensos producidos se seleccionan aleatoriamente seis: Ponedora (Fase I y II), Crecimiento Pollonas, Inicio Polluelos, Ceba Porcino y Vaca Lechera.

El *Modelo III* de Programación Lineal Fuzzy (MDIN: Modelo con Datos Imprecisos en Nutrientes) que se propone para el cálculo de la fórmula se expone a continuación.

$$\text{Min}\{Z = 0,1 \sum_{k=1}^n \frac{p_k x_k}{100 - \Gamma_k} + C_T\} \text{ (A)} \quad \text{o} \quad \text{Min}\{Z = 0,1 \sum_{k=1}^n [\Lambda_k^f(p_k; \Gamma_k)] x_k + C_T\} \text{ (B)} \quad (3)$$

Con $x_k \geq 0$; $\overline{1, n}$ y sujeto a:

(a) Restricciones Nutricionales del Pienso: $10\Omega_i^f(w_i) \leq 0,01 \sum_{k=1}^n \Phi_i^f(a_{ik}) x_k \leq 10\Psi_i^f(W_i)$; $i = \overline{1, s}$; (b) Límites de

Inclusión: $10 I_k^{\text{inf}} \leq x_k \leq 10 L_k^{\text{sup}}$; $k = \overline{1, n}$; (c) Medicamentos: $x_k = 0,1 \frac{\Phi_r}{\theta_r}$; $r = \overline{1, t}$; $t < n$; (d) Relaciones de

porcentaje de ingredientes en fórmula: $\sum_{k=1}^n (\beta_k - a_k P) x_k \{ \leq; \geq \} 0$ donde los pesos del grupo de ingredientes

en mezcla (conjunto A) que representan un por ciento P de otro conjunto de ingredientes pertenecientes también a la mezcla (conjunto B) se expresa mediante las relaciones:

$$\text{Peso(A)} = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k; \beta_k = 1 \text{ si } x_k \text{ es un elemento de A y } \beta_k = 0 \text{ si } x_k \text{ no es un elemento de A} \quad (4)$$

$$\text{Peso(B)} = \sum_{k=1}^n a_k x_k; a_k = 1 \text{ si } x_k \text{ es un elemento de B y } a_k = 0 \text{ si } x_k \text{ no es un elemento de B} \quad (5)$$

y (e) Peso Final: $\sum_{j=1}^n x_j = 1000$.

El significado de los distintos componentes del nuevo modelo se ofrece a continuación.

p_k : Precio de una tonelada del ingrediente "k".

x_k : Cantidad neta (en kilogramos) del ingrediente "k" por tonelada de pienso.

C_T : Total de otros costos de producción (electricidad, transporte, salario, almacenamiento, etc.).

$\Omega_i^f(w_i)$ y $\Psi_i^f(W_i)$: números fuzzy trapezoidales asociados a los límites inferior y superior de la especificación del nutriente "i".

$\Phi_i^f(a_{ik})$: Número fuzzy trapezoidal asociado al nutriente "i" para el ingrediente "k".

I_k^{inf} y L_k^{sup} : Límites inferior y superior de inclusión del ingrediente "k" en fórmula.

Φ_r y θ_r : dosis y concentración del medicamento "r".

$\Lambda_k^f(p_k; \Gamma_k)$: Número fuzzy triangular asociado al precio p_k y coeficiente de pérdida Γ_k del ingrediente "k".

P: porcentaje, deseado por el usuario, entre ingredientes de la ración.

Para el estudio se consideró que la función objetivo del modelo posee la forma (A), es decir, modelo del Problema de la Dieta con precisión en el objetivo e imprecisión en nutrientes de ingredientes y especificaciones nutricionales, en este caso la función objetivo toma la forma $\text{Min}\{z = 0,001[\sum_{k=1}^n p_k x_k]\}$ en virtud de que se

consideró, al igual que en los modelos propuestos en Tozer (2000), que no existe pérdida en ninguno de los ingredientes en el proceso de manufactura ni se toman en consideración otros gastos de producción; la aparición del coeficiente 0,001 se debe a la conversión de p_k en \$/kg. Además, al no establecerse relación de porcentaje entre ingredientes en mezcla el sistema de restricciones está formado por (a), (b), (c) y (e). La restricción (c) se toma en consideración sólo en el caso de Inicio Polluelos donde se incluye Coccicán (500g/ton). Tampoco se incluyeron en el costo final otros gastos de producción, es decir que $C_T = 0$.

En la Figura 1 se ilustra la concepción de búsqueda de la solución del modelo propuesto. En principio ella se basa en la no utilización de la distribución normal (con media $\bar{\mu}(a_{ik})$) sino que ésta se reemplaza por un número fuzzy trapezoidal y normalizado asociado a los ingredientes a_{ik} con función de pertenencia $\mu(x)$ y recorrido en el intervalo $[0;1]$ (análogo a la distribución normal). Al llevar a cabo los diferentes α -cortes ($\alpha \in [0;1]$) se recorre el intervalo $[r_j(a_{ik}); R_j(a_{ik})]$, lo que permite obtener un número superior de soluciones (para cada α -corte se obtiene un modelo y su solución) y la realización de un análisis más detallado del problema. Nótese que ahora el trabajo se basa en la determinación del rango de variación del nutriente (mínimo y máximo: $r_j(a_{ik})$ y $R_j(a_{ik})$). Los valores de $\underline{u}_k(a_{ik})$ y $\bar{u}_k(a_{ik})$ son elementos tomados en consideración por los diferentes criterios de solución y se determinan automáticamente por el sistema informático; los α -cortes se seleccionan por el usuario, pudiéndose lograr incrementos equivalentes a 10^{-4} y obtener soluciones de forma puntual o entre rango de valores.

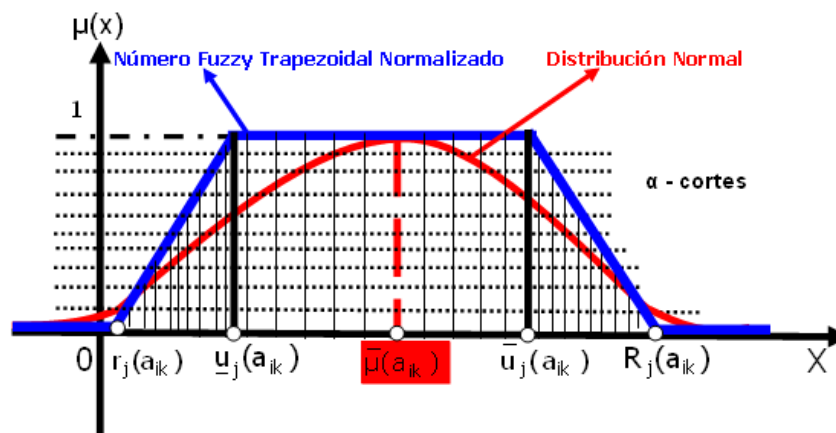


Fig. 1: Gráfico ilustrativo sobre los algoritmos de solución para modelos con datos imprecisos en los coeficientes de la matriz de nutrientes y mediante el empleo de la denominada Programación Estocástica.

Los precios de los diferentes ingredientes se exponen en la Tabla 1. Se considera una tolerancia de un 5% en la especificación nutricional de Proteína Bruta Total para la formulación de los siguientes piensos: Ponedora Fase I (17,00), Ponedora Fase II (16,00), Inicio Polluelos (21,00), Crecimiento Pollonas (18,50), Ceba Comercial Porcino (19,00) y Vaca Lechera (20,00), donde los valores entre paréntesis indican el porcentaje de Proteína Bruta Total que se establece para cada animal. Los coeficientes de pérdidas por ingredientes y sus posibles rangos de variación, así como los rangos de variación de la Proteína Bruta Total por ingredientes y los números fuzzy correspondientes, generados por el sistema informático ForCan son expuestos en la Tabla 2.

Tabla 1: Precios de ingredientes

Ingredientes	Precio (ρ_k) (\$/ton)	Ingredientes	Precio (ρ_k) (\$/ton)
Núcleo Mineral Avícola	832.80	Carbonato de Calcio	16.50
Núcleo Vitamínico Ponedora	1992.80	Coccicán	8701.60
Núcleo Vitamínico Inicio Polluelo	4124.10	Cloruro de Colina	1464.00
Núcleo Vitamínico Crecimiento Avícola	2190.10	Maíz 7	191.80
Premezcla Uso Múltiple Porcino	1691.00	Aceite Vegetal	889.00
Premezcla Vaca Lechera	1245.70	Fosfato Monocálcico	1385.00
Sal Común	28.45	Metionina DL	6170.00
Soya 42	474.00		

Tabla 2: Coeficientes de pérdidas, rangos de variación y números fuzzy asociados a coeficientes de pérdida y proteína bruta total de ingredientes

Ingrediente	Γ_k (%)	$\Delta\Gamma_k$ (%)	Número Fuzzy $\Lambda_k^f(\rho_k; \Gamma_k)$	PBT a_{ik} (%)	Δa_{ik} (%)	Número Fuzzy $\Phi_i^f(a_{ik})$
N. Mineral Avícola	0,25	0,25-0,50	[0,8310; 0,8341; 0,8372]			
N. Vit. Ponedora	0,25	0,25-0,50	[1,9903; 1,9978; 2,0053]			
N. Vit. Inicio Polluelo	0,25	0,25-0,50	[4,1190; 4,1344; 4,1500]			
N. Vit. Crec. Avícola	0,25	0,25-0,50	[2,1874; 2,1956; 2,2039]			
P. Uso Múltiple Porcino	0,25	0,25-0,50	[1,6889; 1,6952; 1,7016]			
P. Vaca Lechera	0,25	0,25-0,50	[1,2441; 1,2488; 1,2535]			
Sal Común	0,50	0,50-1,00	[0,0284; 0,0286; 0,0288]			
Soya 42	2,50	2,50-3,00	[0,4728; 0,4862; 0,5003]	42,00	41-43	[41; 41,5; 42,5; 43]
C. de Calcio	1,50	1,50-2,00	[0,0165; 0,0168; 0,0171]			
Coccicán	0,00	-	-	-	-	-
C. de Colina	0,25	0,25-0,50	[1,4622; 1,4677; 1,4732]			
Maíz 7	3,00	2,50-3,50	[0,1918; 0,1977; 0,204]	7,00	6,5-7,5	[7,0; 6,75; 7,25; 7,5]
Aceite Vegetal	0,30	0,30-0,75	[0,887; 0,8917; 0,8964]			
Fosfato Monocálcico	1,00	1,00-1,50	[1,3815; 1,399; 1,4169]			
Metionina DL	0,5	0,50-0,75	[6,1623; 6,201; 6,2402]			

$\Delta\Gamma_k$: Intervalo de variación del coeficiente de pérdida Γ_k que se considera para el estudio; PBT: Contenido en Proteína Bruta Total; Δa_{ik} : Intervalo de variación del aporte a_{ik} que se considera para el estudio.

Los medicamentos (en este caso el Coccicán) no se someten a los cálculos realizados por razones, según Zinn (2002), de seguridad para la salud animal.

Las especificaciones nutricionales para cada animal se presentan en la Tabla 3.

Es importante advertir que se utilizaron dos grandes métodos para encontrar las soluciones de los modelos con datos imprecisos: (I) Comparación de números fuzzy y (II) Teorema de Representación, pero la esencia de ambos gira alrededor de la búsqueda de un problema o modelo auxiliar de Programación Lineal asociado al

modelo de Programación Lineal Fuzzy que se genera en cada caso. El método I conduce a la aplicación de los índices 1^{ro} y 3^{ro} de Yager, así como a los índices de Adamo y Promedio; el método (II) consiste en que si no todas las funciones tienen igual importancia en la función objetivo, entonces pueden ser empleadas las aproximaciones Intervalar, Posibilística y Estratificada a Trozos. Estos métodos se exponen en Cadenas y Verdegay (1999).

Tabla 3: Requerimientos nutricionales por específico

Requerido	Específicos					
	P.FaseI ⁽¹⁾	P.FaseII ⁽²⁾	C.Pollonas ⁽³⁾	I.Polluelos ⁽⁴⁾	C.Porcino ⁽⁵⁾	V.Lechera ⁽⁶⁾
PBT (%)	≥ 17.00	≥ 16.00	≥ 18.50	≥ 21.00	≥ 19.00	≥ 20.00
EM (Mcal)	≥ 2.78	≥ 2.75	2.80-2.85	≥ 2.90		≥ 2.50
ED (Mcal)					≥ 2.99	
Fibra Bruta (%)	2.00-8.00	2.00-8.00	2.00-10.00	2.00-5.00	≤ 6.00	≤ 10.00
Grasas Bruta (%)	2.00-6.00	2.00-6.00	≥ 2.00	2.00-10.00		
A. Lin (%)	≥ 1.00	≥ 0.95	≥ 1.40	≥ 1.40		
Calcio (%)	≥ 3.80	≥ 4.00	1.00-1.30	1.05-1.35	0.80-1.10	1.30-1.50
PT (%)	≤ 0.80	≤ 0.90	≤ 0.80	≤ 0.80	0.60-0.90	1.00-1.20
PA (%)	≥ 0.40	≥ 0.35	0.45-0.55	0.48-0.60		
Lis. Total (%)	≥ 0.80	≥ 0.78	≥ 1.00	≥ 1.20	≥ 1.10	
Met. Total (%)	≥ 0.40	≥ 0.36	≥ 0.38	≥ 0.48		
Met+Cist (%)	≥ 0.73	≥ 0.70	≥ 0.67	≥ 0.80	≥ 0.66	
Treo. Total (%)	≥ 0.65	≥ 0.55	≥ 0.70	≥ 0.80		
Trip. Total (%)	≥ 0.19	≥ 0.18	≥ 0.21	≥ 0.23		
Colina (%)	≥ 0.044	≥ 0.044	≥ 0.07	≥ 0.07	≥ 0.06	
Cloro (%)	≥ 0.15	≥ 0.15	≥ 0.16	≥ 0.16		
Sodio (%)	≥ 0.15	≥ 0.15	≥ 0.16	≥ 0.16		
L. Digestible (%)	≥ 0.66	≥ 0.66	≥ 0.82	≥ 0.98		
M+C. Digestible (%)	≥ 0.60	≥ 0.60	≥ 0.55	≥ 0.68		

PBT: Proteína Bruta Total; **EM:** Energía Metabolizable Aves; **ED:** Energía Digestible; **Mcal:** Mega caloría; **≥:** significa como mínimo; **≤:** significa como máximo; **A. Lin:** Ácido Linoleico; **PT:** Fósforo Total; **PA:** Fósforo Asimilable; **Lis. Total:** Lisina Total; **Met. Total:** Metionina Total; **Met+Cist:** Metionina + Cistina Total; **Treo. Total:** Treonina Total; **Trip. Total:** Triptófano Total; **L. Digestible:** Lisina Digestible; **M+C. Digestible:** Metionina + Cistina Digestible. **(1):** Ponedora Fase I, **(2):** Ponedora Fase II, **(3):** Crecimiento Pollonas, **(4):** Inicio Polluelos, **(5):** Ceba Porcino, **(6):** Vaca Lechera.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La validación del procedimiento de optimización para la solución del modelo propuesto constó del análisis del número de iteraciones que efectuaron los sistemas informáticos para encontrar la solución de 20 modelos de Programación Lineal de diferente complejidad propuestos (la Tabla 4 muestra estos resultados).

La calidad de las soluciones (en cuanto a valores alcanzados y precisión) es uniforme en todos los sistemas así como los análisis posóptimo correspondientes, sin embargo el procedimiento SPL, con excepción de un caso, descubre de forma más rápida las soluciones no factibles reduciéndose con ello el tiempo de ejecución.

El análisis estadístico efectuado con Statgraphics sobre el número de iteraciones entre los sistemas informáticos arroja que el número de iteraciones efectuadas con el procedimiento SPL puede expresarse según $SPL = 0,718727 * LO^{1,13219}$ y el Análisis de Regresión con corrección de heteroscedasticidad en Gretl (sin constante) permite establecer que $SPL = 1,02817 * LO$. Por tanto, en cuanto al tiempo de ejecución para resolver un mismo modelo el sistema LO y el procedimiento SPL resultan ser aproximadamente equivalentes.

Los valores de σ_{ij} (desviación típica) que se obtienen para el Maíz 7 y la Soya 42 son 0,28232429 y 0,49590679 respectivamente; para el caso de σ_{ij}^2 (varianza) resultaron 0,031737811 y 0,024384036 respectivamente y el valor de $z = 0,83$ (probabilidad o margen de seguridad).

Tabla 4: Número de iteraciones que realizan sistemas informáticos para resolver modelos de Programación Lineal

Modelos	LO	Lindo	Corte	QSB	Solver	SPL
1.- [2;3]	2	2	5	6	5	1
2.- [10;28]	15	18	32	30	29	19
3.- [11;22]	17 ^a	10 ^a	31 ^a	24 ^a	21 ^a	14 ^a
4.- [11;31]	14	19	23	26	21	12
5.- [6;23]	9 ^a	7 ^a	17 ^a	18 ^a	16 ^a	7 ^a
6.- [3;6]	3	4	5	6	5	2
7.- [10;29]	14	16	39	35	32	15
8.- [10;29]	10	21	35	32	31	13
9.- [8;17]	17	17	23	23	4	11
10.- [7;15]	6	8	13	14	13	7
11.- [7;16]	8	9	16	16	15	7
12.- [6;12]	5	10	12	13	12	9
13.- [10;25]	14	15	29	28	27	13
14.- [10;25]	14	15	33	28	27	13
15.- [10;24]	10	11	>40 ^b	26	15	14
16.- [4;3]	2	2	3	>40 ^b	3	4
17.- [5;5]	7	5	8	9	7	6
18.- [12;12]	12	5	2 ^c	15	8	19
19.- [3;3]	3	3	4	5	4	2
20.- [4;4]	3 ^a	6 ^a	10 ^a	6 ^a	5 ^a	1 ^a

Los valores entre corchetes indican número de variables y restricciones respectivamente; **a:** indica solución no factible; **b:** indica que el sistema no encuentra solución; **c:** indica que el sistema encuentra una solución errónea.

SPL: es el nombre del procedimiento de optimización que se diseñó y programó para la solución del modelo de Programación Lineal asociado al modelo con datos imprecisos propuesto (modelo de Programación Lineal Fuzzy).

Los resultados de los costos de fórmulas a costo mínimo con precisión en el objetivo e imprecisión en la Proteína Bruta Total de la Soya 42, Maíz 7 y variación de un 5% en esta especificación en los diferentes piensos objetos de investigación se exponen en la Tabla 5, donde se aprecia la ventaja económica (menores costos de las fórmulas) con la aplicación de MDIN sobre los modelos propuestos en Tozer (2000) (*Modelos I y II*), evidenciándose que la solución puede obtenerse a partir de imprecisión y tolerancias con MDIN; por tanto, si el rango de variación del nutriente se selecciona convenientemente, puede inferirse que la solución de los *Modelos I y II* están contenidas dentro del conjunto de soluciones que se obtiene al aplicar MDIN (*Modelo III*).

La Tabla 6 contiene los resultados de los consumos de cantidades brutas (por tonelada de pienso) del Maíz 7 y Soya 42. Nótese que con el uso de MDIN se producen, exceptuando el caso de Crecimiento Pollonas, más bajos consumos en la Soya 42 (1 kg/Ton más), la que posee mayor valor nutritivo y más alto costo que el Maíz 7. En el resto de los piensos el ahorro por tonelada de la Soya 42 es de consideración.

Tabla 5: Costos de las fórmulas según modelo en uso

Específico	Costos		
	Modelo I (\$)	Modelo II (\$)	MDIN (Modelo III) (\$)
Ponedora Fase I	308.88 ^(a)	308.88 ^(a)	303.49
Ponedora Fase II	283.47 ^(b)	283.47 ^(b)	281.81
Crecimiento Pollonas	317.32 ^(a)	317.32 ^(a)	316.49
Inicio Polluelos	367.64 ^(c)	367.64 ^(c)	363.61
Ceba Porcino	324.38 ^(c)	324.38 ^(c)	317.57
Vaca Lechera	324.44 ^(d)	323.87 ^(e)	318.77

MDIN: Modelos con Datos Imprecisos en Nutrientes y 5% de variación en la especificación Proteína Bruta Total.

(a): igual solución se logra con MDIN con Índice Promedio y $\alpha=0,5$ y con Aproximación Posibilística.

(b): igual solución se logran con MDIN e Índice de Adamo y $\alpha=0,457$.

(c): igual solución se logra con MDIN y Aproximación Posibilística.

(d): igual solución se logra con MDIN e Índice Promedio y $\alpha=0,372$.

(e): igual solución se logra con MDIN e Índice Promedio y $\alpha=0,451$.

Índice Promedio (o González), Aproximación Posibilística e Índice de Adamo son, entre otros, criterios para la búsqueda de la solución en la Optimización de Modelos de Programación Lineal Fuzzy.

Tabla 6: Consumo de Soya y Maíz según modelo en uso

Específico	Consumo Bruto de Maíz 7 (kg/ton de Pienso)			Consumo Bruto de Soya 42 (kg/ton de Pienso)		
	Modelo I	Modelo II	MDIN (Modelo III)	Modelo I	Modelo II	MDIN (Modelo III)
	Ponedora I	554	554	563	308	308
Ponedora II	608	608	612	267	267	263
Crecimiento Pollonas	598	598	598	351	351	352
Inicio Polluelos	503	503	516	415	415	402
Ceba Porcino	540	540	566	420	420	394
Vaca Lechera	577	579	598	359	357	338

Tabla 7: Balance nutricional resultante con aplicación del Modelo I

	Específicos					
	P.FaseI ⁽¹⁾	P.FaseII ⁽²⁾	C.Pollonas ⁽³⁾	I.Polluelos ⁽⁴⁾	C.Porcino ⁽⁵⁾	V.Lechera ⁽⁶⁾
PBT (%)	17	16	18.99	21.06	21.40	20.00
EM (Mcal)	2.78	2.75	2.85	2.94		2.82
ED (Mcal)					3.42	
Fibra Bruta (%)	2.65	2.55	2.95	3.08	3.18	2.95
Grasas Bruta (%)	4.63	3.50	2.92	5.57		
A. Lin (%)	2.31	1.70	1.40	2.81		
Calcio (%)	3.91	4.00	1.30	1.35	1.10	1.50
PT (%)	0.64	0.58	0.71	0.75	0.60	1.00
PA (%)	0.40	0.35	0.45	0.48		
Lis. Total (%)	0.93	0.83	1.05	1.20	1.22	
Met. Total (%)	0.46	0.43	0.38	0.48		
Met+Cist (%)	0.73	0.70	0.68	0.81	0.66	
Treo. Total (%)	0.65	0.59	0.73	0.82		
Trip. Total (%)	0.20	0.18	0.23	0.26		
Colina (%)	0.044	0.044	0.15	0.07	0.06	
Cloro (%)	0.31	0.31	0.28	0.27		
Sodio (%)	0.18	0.17	0.18	0.18		
L. Digestible (%)	0.91	0.80	1.02	1.18		
M+C. Digestible (%)	0.68	0.64	0.63	0.76		

PBT: Proteína Bruta Total; **EM:** Energía Metabolizable Aves; **ED:** Energía Digestible; **Mcal:** Mega caloría; **A. Lin:** Acido Linoleico; **PT:** Fósforo Total; **PA:** Fósforo Asimilable; **Lis. Total:** Lisina Total; **Met. Total:** Metionina Total; **Met+Cist:** Metionina + Cistina Total; **Treo. Total:** Treonina Total; **Trip. Total:** Triptófano Total; **L. Digestible:** Lisina Digestible; **M+C. Digestible:** Metionina + Cistina Digestible. **(1):** Ponedora Fase I, **(2):** Ponedora Fase II, **(3):** Crecimiento Pollonas, **(4):** Inicio Polluelos, **(5):** Ceba Porcino, **(6):** Vaca Lechera.

Tabla 8: Balance nutricional resultante con aplicación del *Modelo II*

	Específicos					
	P.FaseI ⁽¹⁾	P.FaseII ⁽²⁾	C.Pollonas ⁽³⁾	I.Polluelos ⁽⁴⁾	C.Porcino ⁽⁵⁾	V.Lechera ⁽⁶⁾
PBT (%)	17	16	18.99	21.06	21.40	20.00
EM (Mcal)	2.78	2.75	2.85	2.94		2.82
ED (Mcal)					3.42	
Fibra Bruta (%)	2.65	2.55	2.95	3.08	3.18	2.94
Grasas Bruta (%)	4.63	3.50	2.92	5.57		
A. Lin (%)	2.31	1.70	1.40	2.81		
Calcio (%)	3.91	4.00	1.30	1.35	1.10	1.50
PT (%)	0.64	0.58	0.71	0.75	0.60	1.00
PA (%)	0.40	0.35	0.45	0.48		
Lis. Total (%)	0.93	0.83	1.05	1.20	1.22	
Met. Total (%)	0.46	0.43	0.38	0.48		
Met+Cist (%)	0.73	0.70	0.68	0.81	0.66	
Treo. Total (%)	0.65	0.59	0.73	0.82		
Trip. Total (%)	0.20	0.18	0.23	0.26		
Colina (%)	0.044	0.044	0.15	0.07	0.06	
Cloro (%)	0.31	0.31	0.28	0.27		
Sodio (%)	0.18	0.17	0.18	0.18		
L. Digestible (%)	0.91	0.80	1.02	1.18		
M+C. Digestible (%)	0.68	0.64	0.63	0.76		

PBT: Proteína Bruta Total; **EM:** Energía Metabolizable Aves; **ED:** Energía Digestible; **Mcal:** Mega caloría; **A. Lin:** Ácido Linoleico; **PT:** Fósforo Total; **PA:** Fósforo Asimilable; **Lis. Total:** Lisina Total; **Met. Total:** Metionina Total; **Met+Cist:** Metionina + Cistina Total; **Treo. Total:** Treonina Total; **Trip. Total:** Triptófano Total; **L. Digestible:** Lisina Digestible; **M+C. Digestible:** Metionina + Cistina Digestible. **(1):** Ponedora Fase I, **(2):** Ponedora Fase II, **(3):** Crecimiento Pollonas, **(4):** Inicio Polluelos, **(5):** Ceba Porcino, **(6):** Vaca Lechera.

Tabla 9: Balance nutricional resultante con aplicación de MDIN (*Modelo III*)

	Específicos					
	P.FaseI ⁽¹⁾	P.FaseII ⁽²⁾	C.Pollonas ⁽³⁾	I.Polluelos ⁽⁴⁾	C.Porcino ⁽⁵⁾	V.Lechera ⁽⁶⁾
PBT (%)	17	16	19.00	21.00	20.49	20.00
EM (Mcal)	2.78	2.75	2.85	2.96		2.83
ED (Mcal)					3.42	
Fibra Bruta (%)	2.65	2.54	2.95	3.04	3.10	2.88
Grasas Bruta (%)	4.64	3.44	2.92	5.61		
A. Lin (%)	2.31	1.67	1.40	2.83		
Calcio (%)	3.94	4.00	1.30	1.35	1.10	1.50
PT (%)	0.64	0.58	0.71	0.75	0.60	1.00
PA (%)	0.40	0.35	0.45	0.48		
Lis. Total (%)	0.93	0.82	1.05	1.20	1.16	
Met. Total (%)	0.46	0.43	0.38	0.48		
Met+Cist (%)	0.73	0.70	0.67	0.80	0.66	
Treo. Total (%)	0.65	0.59	0.73	0.80		
Trip. Total (%)	0.20	0.18	0.23	0.25		
Colina (%)	0.044	0.044	0.14	0.07	0.06	
Cloro (%)	0.31	0.31	0.28	0.27		
Sodio (%)	0.18	0.17	0.18	0.18		
L. Digestible (%)	0.90	0.79	1.02	1.14		
M+C. Digestible (%)	0.68	0.63	0.62	0.74		

PBT: Proteína Bruta Total; **EM:** Energía Metabolizable Aves; **ED:** Energía Digestible; **Mcal:** Mega caloría; **A. Lin:** Ácido Linoleico; **PT:** Fósforo Total; **PA:** Fósforo Asimilable; **Lis. Total:** Lisina Total; **Met. Total:** Metionina Total; **Met+Cist:** Metionina + Cistina Total; **Treo. Total:** Treonina Total; **Trip. Total:** Triptófano Total; **L. Digestible:** Lisina Digestible; **M+C. Digestible:** Metionina + Cistina Digestible. **(1):** Ponedora Fase I, **(2):** Ponedora Fase II, **(3):** Crecimiento Pollonas, **(4):** Inicio Polluelos, **(5):** Ceba Porcino, **(6):** Vaca Lechera.

Las tablas 7, 8 y 9 muestran los balances nutricionales resultantes al calcular las fórmulas según los *modelos I, II y III*. Puede apreciarse que con el empleo de los distintos modelos para el cálculo de la fórmula se logran, en todos los casos, balances nutricionales que satisfacen los requerimientos especificados en la Tabla 3.

CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos, es posible extraer las siguientes conclusiones:

1. El modelo propuesto no está en contradicción con el criterio de consideración de la variabilidad de nutrientes en los ingredientes, por el contrario lo emplea, pero con un tratamiento matemático totalmente diferente al planteado por otros investigadores e incluye dentro de sus soluciones las que emplean un método estadístico - experimental para determinar el valor del nutriente proteína bruta total de ingredientes.
2. Al obtenerse fórmulas con equivalente calidad nutricional y más bajo costo, los modelos con datos imprecisos en sus componentes poseen superioridad económico – nutricional sobre los que emplean un método estadístico - experimental para determinar el valor del nutriente proteína bruta total de ingredientes.
3. El empleo del modelo con datos imprecisos para encontrar la fórmula, respecto a cuando se utilizan modelos basados en la determinación del valor proteico de ingredientes vía estadístico – experimental, puede proporcionar ahorro de ingredientes de alto costo y valor nutritivo tales como la Soya.

REFERENCIAS

1. Cadenas Figueredo, J.L. & Verdegay, J.L. (1999). Modelos de Optimización con Datos Imprecisos. Universidad de Murcia. España. 169p.
2. D'Alfonso, T.H., Roush, W.B. & Ventura, J.A. (1992a). Least Cost Poultry Rations with Nutrient Variability: A comparison of Linear Programming with a margin of Safety and Stochastic Programming Models. *Poultry Science*, 71, 255-262.
3. D'Alfonso, T.H., Roush, W.B. & Cravener, T.L. (1992b). Reducing feed costs. Stochastic Programming. *Feed Management*, 43 (6), 11-13.
4. Duncan, M.S. (1986). How to deal with ingredient variability. Porc. AFIA Nutr. Symp. Am. Feed Mfg. Assn. Arlington, Va., USA, pp. 67.
5. Duncan, M.S. (1988). Problems of dealing with raw ingredient variability. Recent Advances in Animal Nutrition. University of Nottingham School of Agricultura, USA, pp. 3-11.
6. Guevara, V.R. (2004). Use of Nonlinear Programming to Optimize Performance Response to Energy Density in Broiler Feed Formulation. *Education and Production. Poultry Science*, 83, 147-151.
7. Morales, D.M. (2005). Sistema de ayuda a la decisión para el desarrollo de raciones óptimas en la alimentación animal basado en optimización. La Habana, EDUNIV, p. 318.
8. Morales, D.M. (2008). Modelos y sistema de ayuda a la decisión para producciones industriales de alimento animal en la República de Cuba. La Habana, EDUNIV, p. 167.
9. Roush, W.B. (2004). Stochastic Programming: Addressing Risk Due to Variability. *Aqua Feeds: Formulation & Beyond*, 1 (3), 6-8.
10. Tozer P.R. (2000). Least-Cost Ration Formulations for Holstein Dairy Heifers By Using Linear and Stochastic Programming. *J. Dairy Sci.*, 83, 443-451.

