

ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS CON *pplane8.m* (MATLAB® toolbox)

DYNAMIC SYSTEM ANALYSIS WITH *pplane8.m* (MATLAB® toolbox)

Alejandro Regalado-Méndez^{1*}, Jesús G. Madrid-González¹

(1) Universidad del Mar, Campus Puerto Ángel, Ciudad Universitaria S/N, Puerto Ángel,
70902 San Pedro Pochutla, Oaxaca - México

*autor de contacto (e-mail: alejandro.regalado33@gmail.com)

Recibido: 16/04/2013 - Evaluado: 06/06/2013 - Aceptado: 09/07/2013

RESUMEN

En este trabajo se analizaron cuatro sistemas dinámicos (físico, químico, ecológico y económico), los cuales son representados por sistemas autónomos de dos ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo principal es demostrar que *pplane8.m* es una herramienta computacional adecuada y eficiente. El análisis de los sistemas autónomos se llevó a cabo con base en la caracterización de sus puntos críticos de acuerdo a lo citado por Coughanowr & LeBlanc (2009) y con ayuda de *pplane8.m* (MATLAB® toolbox). Los principales resultados de este trabajo son que, *pplane8.m* (Polking, 2009) dibuja rápida y precisamente las trayectorias de todos los planos de fases, calcula con facilidad todos los puntos críticos y caracteriza correctamente cada uno de los puntos de equilibrio de los sistemas autónomos estudiados. Finalmente se puede decir que *pplane8.m* es una herramienta poderosa para ayudar en el proceso de enseñanza aprendizaje para estudiantes de un programa de ingeniería.

ABSTRACT

In this work, four dynamic systems were analyzed (physical, chemical, ecological and economical), represented by autonomous systems of two ordinary differential equations. Main objective is proving that *pplane8.m* is an adequate and efficient computer tool. The analysis of autonomous systems was given by characterization of their critical points according to Coughanowr & LeBlanc (2009), with the MATLAB® toolbox *pplane8.m*. The main results are that *pplane8.m* (Polking, 2009) can quickly and precisely draw trajectories of each phase plane, it easily computes each critical point, and correctly characterize each equilibrium point of all autonomous studied systems. Finally, we can say that *pplane8.m* is a powerful tool to help the teaching-learning process for engineering students.

Palabras clave: plano de fases; punto crítico; sistema autónomo; sistema dinámico
Keywords: phase plane; critic point; autonomous system; dynamic system

INTRODUCCIÓN

Una amplia variedad de fenómenos físicos, químicos, biológicos, ecológicos, económicos y/o combinaciones de estos son modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (Wei-Chau, 2010; Korn, 2011). En los modelos dinámicos es muy importante estudiar los estados estacionarios (también llamados puntos críticos o puntos de equilibrio) y su estabilidad (Roffel & Betlem, 2006), ya que definen el rendimiento de entrada/salida del sistema. Entonces, se puede decir que un sistema dinámico puede tener cero, uno o más puntos críticos. Un punto crítico representa una condición estacionaria en la dinámica del sistema (Bakshi & Bakshi, 2008). El estudio de los puntos de equilibrio es de suma importancia ya que estos proporcionan la información necesaria para obtener las propiedades naturales de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias. De tal manera que, la estabilidad de los sistemas lineales y no-lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias es caracterizada por la naturaleza de sus puntos singulares. La estabilidad de un sistema puede pensarse como una continuidad en su comportamiento dinámico (Bubnicki, 2005). Si se presenta un cambio pequeño en las entradas o condiciones iniciales, un sistema estable presentara pequeñas compensaciones en su respuesta perturbada (Chau, 2002). Por otro lado, en un sistema inestable cualquier perturbación, por pequeña que sea, llevará estados y/o salidas a crecer sin límite, desintegrarse o saturarse. Es evidente entonces que la estabilidad es un requerimiento básico de los sistemas dinámicos destinados a realizar operaciones o procesar señales, y es lo primero que debe garantizarse en el diseño de un sistema de control (Tayet *al.*, 1997; Fairman, 1998). A continuación se hace una breve descripción de los términos empleados en el análisis de sistemas dinámicos.

Ecuaciones Diferenciales

Considérese un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias aquel que tiene la forma de la ecuación siguiente (Evans, 2004).

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

Dónde: $x \in R^n$, $t \geq 0$

Se dice que el sistema definido por la ec. 1 es *autónomo* o *invariante en el tiempo*, si f no depende de t , y *no autónomo* o *variante en el tiempo*, en caso contrario. También, se dice que el sistema puede ser lineal si $f(t, x) = A(t)x$ para algunos $A(\cdot): R_+ \rightarrow R^{n \times n}$ y no-lineal en caso contrario (Sasthy & Bodson, 1989; Slotine & Li, 1991).

Linealización de Sistemas No-Lineales en Expansión en Series de Taylor

Un modelo no-lineal puede ser reducido a su forma lineal por medio de la expansión en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio o de operación (Ver ec. 2) (Smith & Corripio, 2006; Roffel & Betlem, 2006; William II & Lawrence, 2007).

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f_1(x_{1s}, x_{2s}) + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_1 - x_{1s}) + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_2 - x_{2s}) \\ f_2(x_1, x_2) &= f_2(x_{1s}, x_{2s}) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_1 - x_{1s}) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_2 - x_{2s}) \end{aligned} \quad (2)$$

Dónde: x_{1s} , x_{2s} son las coordenadas del punto crítico o también conocido como punto de equilibrio.

Si (x_{1s}, x_{2s}) es un punto crítico, implica que $f_1(x_{1s}, x_{2s}) = 0$ y $f_2(x_{1s}, x_{2s}) = 0$, entonces la ec. 1 puede ser representada por la ec. 3.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_1 - x_{1s}) + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_2 - x_{2s}) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_1 - x_{1s}) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})} (x_2 - x_{2s}) \end{aligned} \quad (3)$$

En términos de variables de desviación $\hat{x}_1 = x_1 - x_{1s}$; $\hat{x}_2 = x_2 - x_{2s}$, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias queda dado por la siguiente ecuación (Klee & Allen, 2011):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 \end{aligned}$$

En la forma compacta o matricial:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \underline{A}\hat{x} \quad (4)$$

Dónde: $a_{11} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})}$; $a_{12} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})}$; $a_{21} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})}$; $a_{22} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1s}, x_{2s})}$; \underline{A} Matriz Jacobiana constante de 2×2 .

Comportamiento de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

El comportamiento de las soluciones del sistema de la ec. 4 en la vecindad cercana al punto crítico es completamente determinado por los vectores propios de la matriz *Jacobiana* (\underline{A}). Esto es asumiendo el hecho de que la solución de la ec. 4 es de la forma de la ec. 5.

$$\hat{x}(t) = \vec{v}e^{\lambda t} \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (4), se tiene:

$$\lambda \vec{v}e^{\lambda t} = \underline{A}\vec{v}e^{\lambda t} \quad (6)$$

Lo cual es cierto, si:

$$\lambda \vec{v} = \underline{A}\vec{v} \quad (7)$$

Dónde: λ : Valores propios de la matriz \underline{A} ; \vec{v} : Vectores propios asociados a la matriz \underline{A} .

Punto de Equilibrio o Crítico

x_s es llamado punto de equilibrio de la ec. 1 si $f(t, x) = 0 \quad \forall t \geq 0$. Por notación y como propiedad de la ec. 1, considérese al origen 0 como un punto de equilibrio x_0 (Sastry & Bodson, 1989). Los puntos de equilibrio pueden ser analizados mediante un análisis de plano de fases. Los puntos críticos pueden ser determinados fácilmente para un sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con ayuda de un método numérico para el cómputo de raíces, por ejemplo el método de Newton para varias variables.

Análisis de Plano de Fases

Desde los años 60's y hasta hoy en día, los planos de fase son un método gráfico muy útil y empleado para analizar y caracterizar sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y en sistemas de dos ecuaciones diferenciales, mediante la observación y análisis de la pendiente de las trayectorias que pasan a través de un punto determinado. Dicho análisis es representado por la siguiente ecuación (Slotine & Li, 1991).

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} \quad (8)$$

Dónde: $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ son no-lineales

Asumiendo que las funciones $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ pueden ser evaluadas con cualquier simple valor (x_1, x_2) , entonces, usualmente existe un valor definido de la pendiente para cualquier punto dado en el plano de fases, esto implica que las trayectorias de las fases no se intersectan. Pero cuando son evaluadas en sus puntos críticos o singulares, el valor de la pendiente es $0/0 \rightarrow$ que es indeterminada (Stoline & Li, 1991; Lee, 1992; Coughanowr & LeBlanc, 2009). Entonces, muchas de las trayectorias de la fase deben de intersectarse en los puntos singulares tal como se observa en la Figura 1.

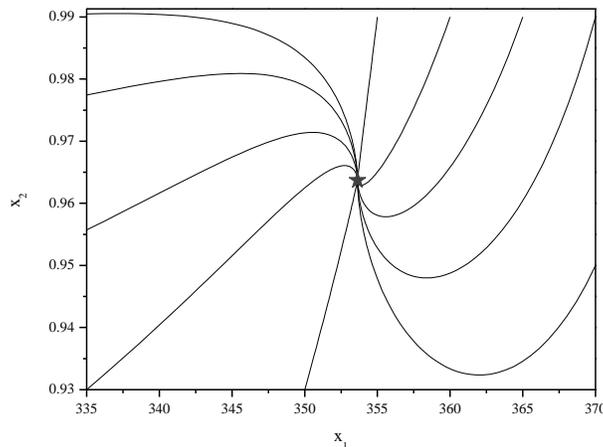


Fig. 1: Plano de fases (Regalado, 2010). Notación: – Trayectorias de fase y * punto singular.

Criterios de Estabilidad de los Puntos Críticos de Sistemas Lineales

Los valores propios de la matriz A pueden asumir alguna de las descripciones de la Tabla 1, en la cual se muestra el resumen del comportamiento de la dinámica de la mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, asignando nombres a los tipos de puntos críticos y su tipo de estabilidad. Los valores propios son calculados de la forma $\det(A - I\lambda) = 0$.

El objetivo de este trabajo es realizar el análisis de sistemas dinámicos mediante el uso de *pplane8.m*, el cual es una aplicación y herramienta de MATLAB®. En la siguiente sección se describen cuatro casos de estudio, representando a un fenómeno físico, químico, ecológico y económico respectivamente. Los cuatro casos de estudio son representados por sistemas de dos ecuaciones diferencias ordinarias.

Tabla 1: Resumen del comportamiento de sistemas lineales (Coughanowr & LeBlanc, 2009)

Valores propios	Descripción de las raíces	Tipo de punto crítico	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	reales, distintas, ambos signos positivos	nodo	inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	reales, distintas, ambos signos negativos	nodo	estable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	reales, distintas, signos opuestos	punto silla	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, vectores propios independientes	reales, repetidas, signos positivos	nodo correcto o punto neutro	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, vectores propios independientes	reales, repetidas, signos negativos	nodo correcto o punto neutro	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, vectores propios inexistentes	reales, repetidas, signos positivos	nodo incorrecto	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, vectores propios inexistentes	reales, repetidas, signos negativos	nodo incorrecto	estable
$\lambda = a \pm ib$, $a > 0$	complejo, parte real positiva	espiral	inestable
$\lambda = a \pm ib$, $a < 0$	complejo, parte real negativa	espiral	estable
$\lambda = a \pm ib$, $a = 0$	solo parte imaginaria	centro o elipse	estable

Caso de estudio 1 (Sistema Físico):

Considere el movimiento de una masa, m , la cual se hace oscilar en el extremo de una barra rígida, tal como se representa en la Figura 2. Asumir que la resistencia del aire es despreciable. La ec. 9 representa el modelo matemático del sistema físico. Así mismo, en la Tabla 2 son desplegados los parámetros físicos del sistema físico.

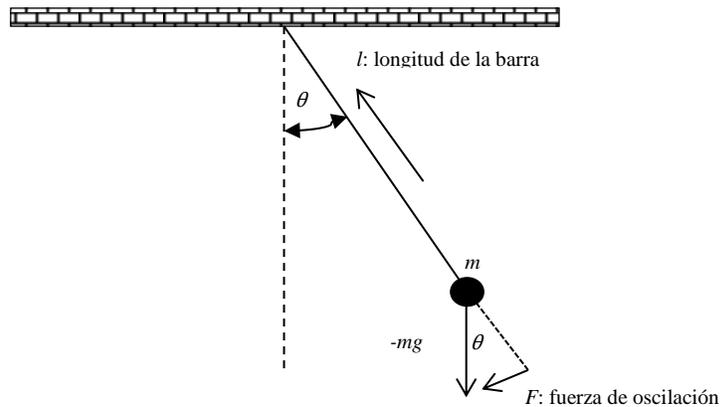


Fig. 2: Influencia de la fuerza de gravedad.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{l} \text{sen}(x_1) \end{aligned} \tag{9}$$

Tabla 2: Parámetros del péndulo.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
g :	Constante de gravedad	9.81	$m\ s^{-2}$
l :	Longitud de la barra	1	m

Nomenclatura: $x_1 = \theta$, radianes; $x_2 = dx_1/dt$, s^{-1} ; θ : ángulo, radianes, T : tensión de la barra, N m; m : masa; F : fuerza de oscilación, N.

Caso de estudio 2 (Sistema Químico):

Considérese el caso de una reacción química exotérmica $A \xrightarrow{k} B$, que se lleva a cabo en un reactor continuo de tanque agitado (CSTR). El sistema de reacción está representado por la Figura 3 y modelado por la ec. 10. En la Tabla 3 se muestran los parámetros del sistema (Aris, 1973).

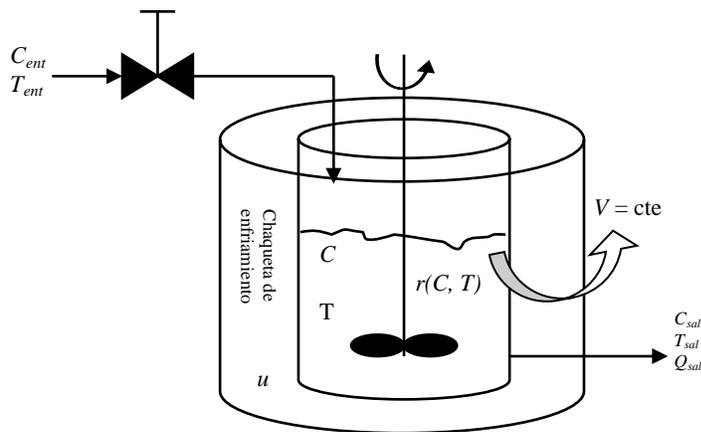


Fig. 3: Reactor continuo de tanque agitado (basado en Levenspiel, 2004; Fogler, 2001).

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \theta(C_{ent} - C) - r(C, T) \\ \frac{dT}{dt} &= \theta(T_{ent} - T) - (\Delta H_{rxn})r(C, T) + \gamma(u - T) \\ r(C, T) &= k_0 C e^{-E_A/RT} \end{aligned} \tag{10}$$

Tabla 3: Parámetros del CSTR.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
θ :	Velocidad de dilución	1	min^{-1}
γ :	Coefficiente global de transferencia de calor	1	min^{-1}
ΔH_{rxn} :	Entalpía de reacción	-200	$m^3\ K\ mol^{-1}$
u :	Temperatura de la chaqueta de enfriamiento	350	K
k_0 :	Constante pre-exponencial	e^{25}	min^{-1}
E_A/R :	Relación de la energía de activación y la constante de gases ideales	10000	K
C_{ent} :	Concentración inicial en el reactor	1	$mol\ m^{-3}$
T_{ent} :	Temperatura inicial en el reactor	350	K

Nomenclatura: C : concentración dentro del reactor, $mol\ m^{-3}$; t : tiempo, min ; r : velocidad de reacción, $mol\ min^{-1}$.

Caso de estudio 3 (Sistema Ecológico):

Considere el sistema ecológico presa-depredador representado en forma conceptual de la Figura 4 y modelado matemáticamente por la ec. 11, la cual está escrita en forma adimensional (Tanner, 1975). Los parámetros están dados en la Tabla 4.

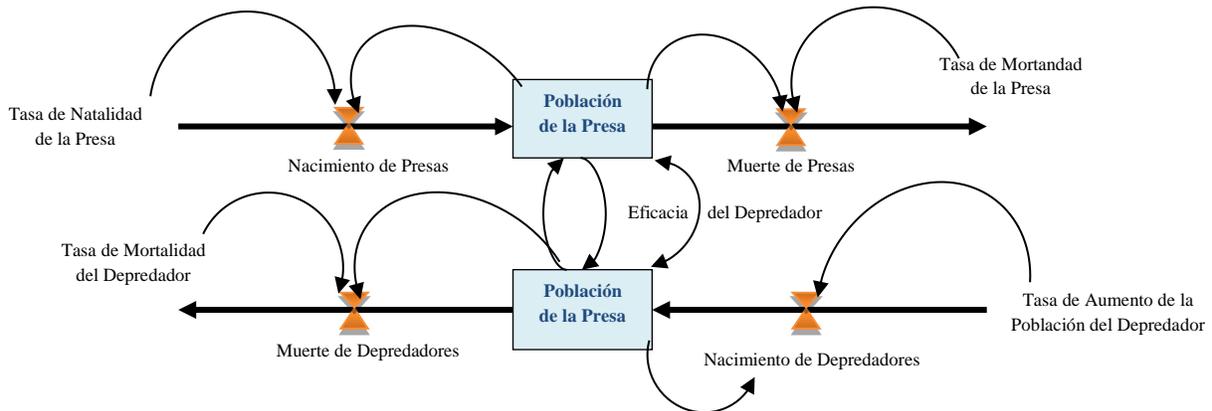


Fig. 4: Modelo dinámico de presada-depredador (basado en Haefner, 2005).

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{k}\right) - wP \frac{H}{(H + D)}$$

$$\frac{dP}{dt} = s \left(1 - \frac{P}{J}\right) P$$
(11)

Tabla 4: Parámetros del Sistema presa-depredador.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
r :	Velocidad natural de crecimiento de la presa	0.5	Adimensional
s :	Velocidad natural de crecimiento del depredador	0.1	Adimensional
k :	Capacidad de carga del medio ambiente	400	Adimensional
J :	Cantidad de presas necesario para apoyar a un depredador en equilibrio	1.5	Adimensional
w :	Velocidad de depredación máxima	0.5	Adimensional
D :	Tiempo de búsqueda de depredadores	5	Adimensional

Nomenclatura: P: cantidad de presas, D: cantidad de depredadores, adimensional; t: tiempo, años.

Caso de estudio 4 (Sistema Económico):

Considere el sistema económico basado en el modelo de Ramsey (1928), el cual está representado matemáticamente por la ec. 12. Los parámetros económicos se encuentran resumidos en la Tabla 5.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C}{\theta} (\alpha K^{\alpha-1} - (\delta + \rho))$$

$$\frac{dK}{dt} = K^\alpha - C - (n + \delta)K$$
(12)

Tabla 5: Parámetros del Sistema económico (Trimborn, 2012).

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
α :	Elasticidad del capital en la producción	0.33	Adimensional
n :	Velocidad de crecimiento de la población	70	tiempo
δ :	Velocidad de depreciación	0.02	tiempo
ρ :	Parámetro para el tiempo de referencia	0.50	Adimensional
θ :	Inverso de la elasticidad intertemporal de sustitución	0.08	Adimensional

Nomenclatura: K: Capital percapita, US Dollar, C: Consumo percapita, US Dollar.

Los cuatro sistemas de ecuaciones diferenciales binarios serán resueltos y analizados con *pplane8.m* (MATLAB® toolbox) (Polking, 2009).

METODOLOGÍA

En primera instancia se tomarán a *pplane8.m* (Polking, 2009) como herramienta computacional principal, con la cual se realizará el análisis de los cuatro casos de estudio (sistemas: físico, químico, ecológico y económico). La metodología para el uso de *pplane8.m* puede resumirse en los siguientes pasos:

Paso 1. Si los usuarios no cuentan con la rutina *pplane8.m* descargarla de alguno de los sitios web:

- i. <http://math.rice.edu/~dfield/#8.0>
- ii. http://math.rice.edu/_dfield
- iii. <http://goremote.ics.purdue.edu>
- iv. <http://math.rice.edu/~dfield/matlab8/>

Paso 2. Abrir y hacer *clíc* en el icono  para correr la subrutina *pplane8.m* en MATLAB® 2012a.

Paso 3. Se generara una sub-ventana tal como se muestra en la Figura 5. Escribir correctamente las dos ecuaciones diferenciales que representan el sistema a analizar, así como el rango de valores de la variable independiente y la variable dependiente. Note que solo tiene espacio para seis parámetros.

Paso 4. Salvar el sistema a analizar empleando una de las dos siguientes vías.

- i. Hacer *clíc* en *file/Save the current system...*
- ii. Hacer *clíc* en *file/Save a gallery...*

Paso 5. Hacer *clíc* en *Proceed* para generar la ventana de la gráfica llamada *pplane8 Display*.

Paso 6. Hacer *clíc* en *Solutions/Show nullclines* para encontrar el espacio nulo o puntos críticos.

Paso 7. Hacer *clíc* en el área de la gráfica para encontrar las trayectorias que se encuentran cercanas a los puntos críticos.

Paso 8. Hacer *clíc* en *Solution/Find an equilibrium point* para encontrar un punto crítico. En la cual se genera una sub-sub-ventana que muestra el punto crítico, valores propios, vectores propios y el comportamiento del punto crítico. Nota: La descripción dada puede no ser correcta.

Paso 9. Hacer *clíc* en *Solutions/List computed equilibrium point* para obtener la lista completa de los puntos de equilibrio en la ventana de *Command Window*.

Paso 10. Existen varias opciones disponibles dentro de la sub-ventana *pplane8 Display* tales como: *printing* (imprimir), *keyboard input of initial conditions* (entrada de condiciones iniciales por medio del teclado), *inserting text* (insertar texto), *erasing solutions* (eliminar soluciones), *zoom* (agrandar), etc.

Finalmente, se caracterizaran los puntos de equilibrio con base en los valores propios del sistema autónomo de acuerdo a la clasificación de Coughanowr & LeBlanc (2009).

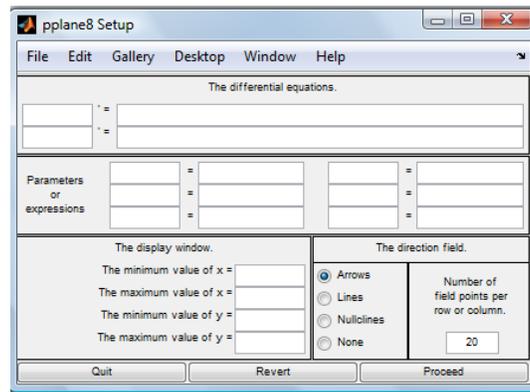


Fig. 5: Retrato de fase con *pplane8.m* (MATLAB® *toolbox*).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección presentamos los resultados más relevantes de cada caso de estudio. Para cada caso de estudio se calcularon y caracterizaron los puntos críticos con base en el criterio de Coughanowr & LeBlanc (2009). También se muestra el mapa de bifurcación, retrato fase o plano fase de cada caso de estudio.

Caso de estudio1

En la Figura 6 se muestran las ecuaciones diferenciales del péndulo en la ventana de *pplane8 setup* de MATLAB® *toolbox*. En dicha ventana se especifican las constantes del sistema y los valores máximos y mínimos de los ejes x_1 y x_2 .

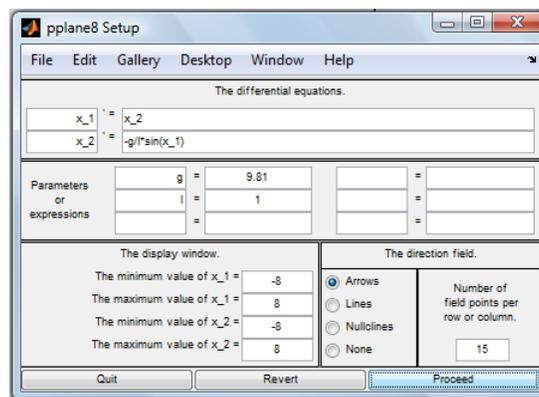


Fig.6: Sistema físico en *pplane8.m*.

En la Figura 7a se muestran los espacios nulos del sistema autónomo físico, los cuales representan los puntos críticos del péndulo y podemos observar que se encuentran cada $n\pi \forall n \in \mathbb{Z}$. También se puede decir que cuando n es par los puntos críticos son del tipo centro y que cuando n es impar los puntos críticos son del tipo silla, tal como son caracterizados en la Tabla 6. A pesar de que la variable tiempo no aparece en el plano de fase del péndulo (Figura 7b), se puede deducir como característica física que los posibles movimientos del péndulo son periódicos. Lo anterior está de acuerdo con lo reportado por Marsden & Ratiu (1996).

Las Figuras 7c y 7d son ampliaciones de un punto crítico tipo centro y un punto crítico tipo silla respectivamente.

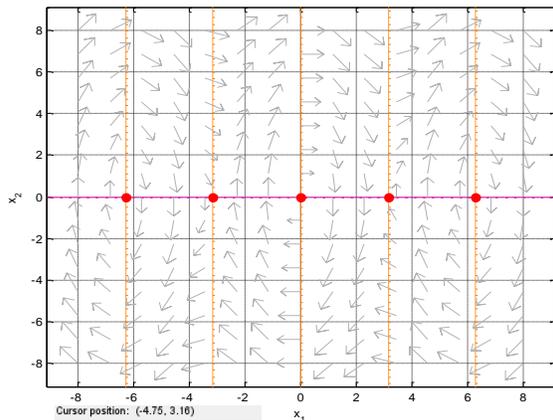


Fig. 7a: Puntos críticos del péndulo.

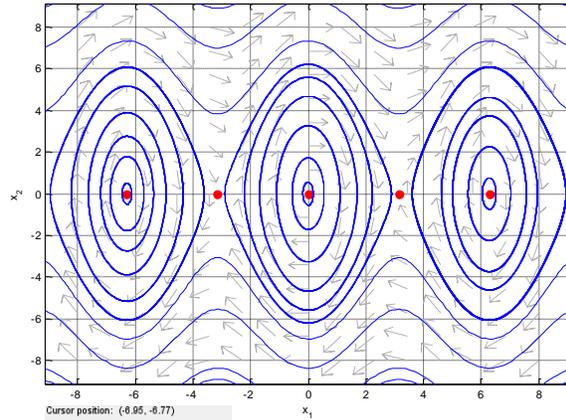


Fig. 7b: Retrato fase del péndulo.

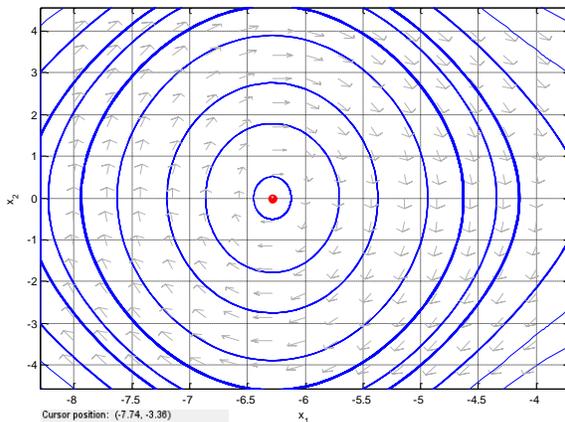


Fig. 7c: Ampliación del retrato de fases para el punto centro del péndulo.

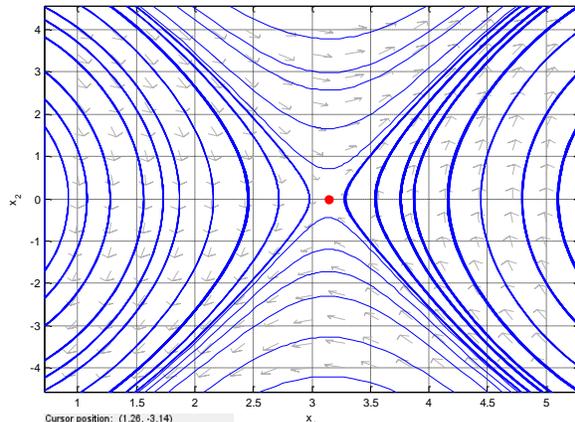


Fig. 7d: Ampliación del retrato de fase para el punto silla del péndulo.

En la Tabla 6 se encuentra el resumen del análisis de algunos de los puntos críticos del sistema autónomo físico. En dicha tabla se observa que los puntos centro son estables mientras que los puntos silla son inestables. Para el control de procesos los puntos inestables son los de interés para implementar un sistema de control.

Tabla 6: Resumen de puntos críticos del fenómeno físico.

No.	Punto crítico (x_1, x_2)	Valor propio		Descripción de la raíz	Comportamiento	Estabilidad
		λ_1	λ_2			
1	$(-2\pi, 0)$	$\pm 3.1321i$		Imaginaria, sin parte real	Punto Centro	Estable
2	$(-\pi, 0)$	± 3.1321		Real, iguales, signo opuesto	Punto Silla	Inestable
3	$(0, 0)$	$\pm 3.1321i$		Imaginaria, sin parte real	Punto Centro	Estable
4	$(\pi, 0)$	± 3.1321		Real, iguales, signo opuesto	Punto Silla	Inestable
5	$(2\pi, 0)$	$\pm 3.1321i$		Imaginaria, sin parte real	Punto Centro	Estable

Caso de estudio 2

En la Figura 8 se muestran las ecuaciones diferenciales del CSTR en la ventana de *plane8 setup* de MATLAB® *toolbox*. En dicha ventana se especifican las constantes del sistema y los valores máximos y mínimos de los ejes C y T .

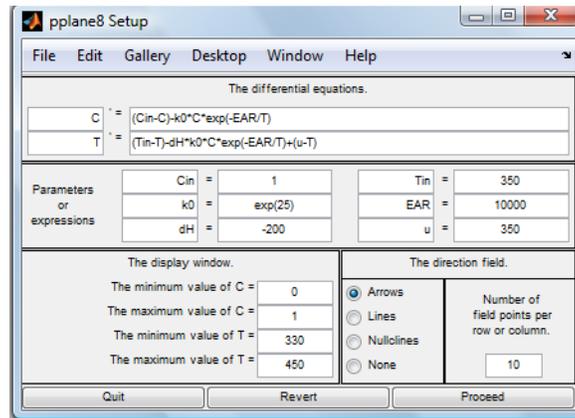


Fig. 8: Sistema químico en *pplane8.m*.

En la Figura 9a se muestran los espacios nulos del sistema autónomo químico, los cuales representan los puntos críticos del CSTR. En dicha figura podemos observar tres puntos críticos, lo cual es característico de los CSTRs y se está de acuerdo con los estudios realizados por Aris (1973). Adicionalmente, en diseño y análisis de reactores los puntos críticos son muy importantes ya que determinan que punto crítico brinda la producción óptima del proceso (Fogler, 2001; Regalado *et al.*, 2010).

En la Figura 9b se muestran las trayectorias del plano de fases del CSTR. En dicha figura podemos observar que existen dos puntos de equilibrio estables y un punto de equilibrio inestable. Estos puntos de equilibrio son caracterizados en concordancia con Coughanowr & LeBlanc (2009). Una descripción clara y detallada de la caracterización de los puntos críticos del sistema autónomo químico es dada en la Tabla 7.

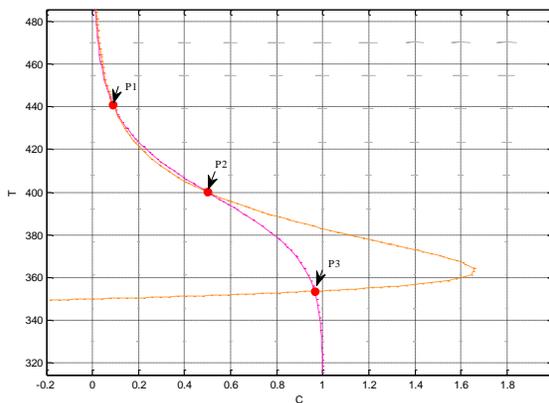


Fig. 9a: Puntos críticos del CSTR.

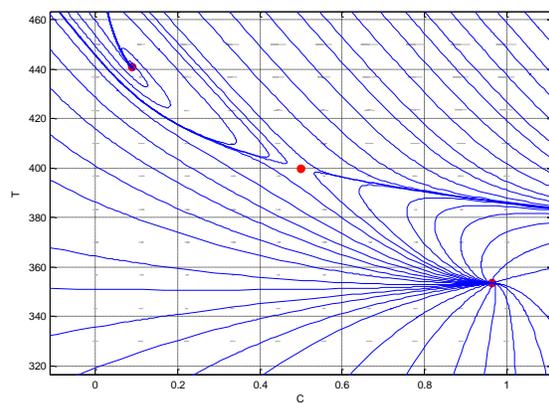


Fig. 9b: Retrato de fase del CSTR.

Las Figuras 9c, 9d y 9e son ampliaciones de los puntos críticos del CSTR, los cuales son un punto espiral, punto silla y punto nodal respectivamente. De acuerdo con la clasificación de Coughanowr & LeBlanc (2009) los puntos espiral y nodal son puntos estables, mientras que el punto silla es inestable.

En la Tabla 7 se muestra el resumen del análisis de los puntos críticos del sistema autónomo químico. En dicha tabla se muestra que solo existe un punto crítico inestable y de acuerdo a lo reportado por Aris (1973) y Regalado *et al.* (2010), el punto crítico (0.5, 400.0) corresponde a la producción óptima en el proceso químico. Además, dicho punto de equilibrio es de gran interés para implementar una estrategia de control.

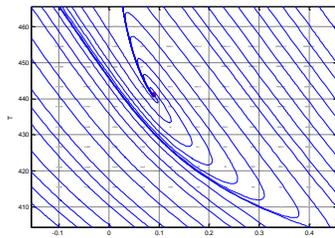


Fig. 9c: Ampliación del 1^{er} punto crítico del CSTR.

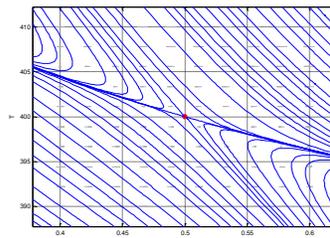


Fig. 9d: Ampliación del 2^{do} punto crítico del CSTR.

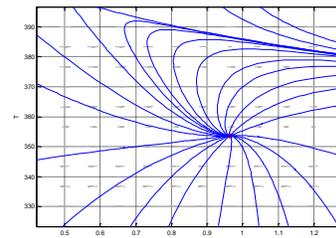


Fig. 9e: Ampliación del 3^{er} punto crítico del CSTR.

Tabla 7: Resumen de puntos críticos del sistema químico.

Punto crítico (C, T)	1	2	3
Valor propio λ	1	2	
	$-1.9651651+3.0604i$	$-1.9651651-3.0604i$	
Descripción de la raíz	Complejas, parte real negativa	Reales, distintas, signos opuestos	Reales, distintas, signos iguales
Comportamiento	Punto espiral	Punto silla	Nodo
Estabilidad	Estable	Inestable	Estable

Caso de estudio 3

En la figura 10 se muestran las ecuaciones diferenciales del sistema ecológico en la ventana de *pplane8 setup* de MATLAB[®] toolbox. En dicha ventana se especifican las constantes del sistema y los valores máximos y mínimos de los ejes *H* y *P*.

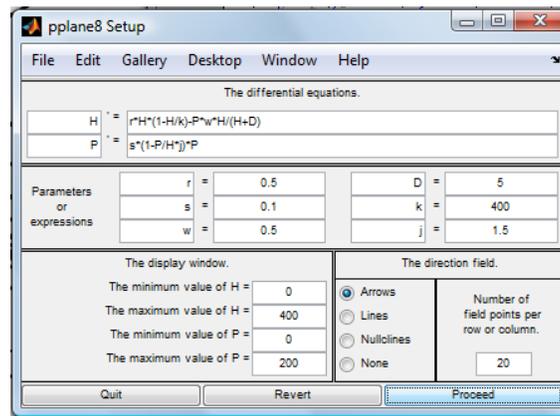


Fig.10: Sistema ecológico en *pplane8.m*.

En la Figura 11a se muestran los espacios nulos del sistema autónomo ecológico, los cuales representan los puntos críticos del modelo presa-depredador antes mencionado. Esos puntos críticos son muy importantes ya que muestran indicios del equilibrio ecológico que debe existir en el sistema presa-depredador. Nótese que el primer punto crítico se encuentra en la parte negativa del plano *H-P*, lo cual nos indica que no tiene sentido ecológico en dicho sistema. Sin embargo, en la Tabla 8 se caracteriza el punto crítico antes mencionado.

En la Figura 11b se muestran las trayectorias del plano de fases del modelo presa-depredador, en el cual podemos notar que tenemos un punto silla, un punto nodal y un punto espiral. En las Figuras 11c, 11d y 11e se muestra una ampliación de ellos. También podemos notar que, por la forma en que las trayectorias del plano de fases llegan a cada uno de los puntos críticos, los puntos de equilibrio son inestables. La caracterización detallada de los puntos críticos del sistema autónomo ecológico es mostrada en la Tabla 8.

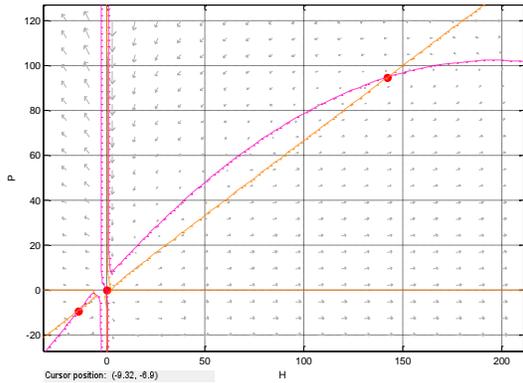


Fig. 11a: Puntos críticos del modelo presa-depredador.

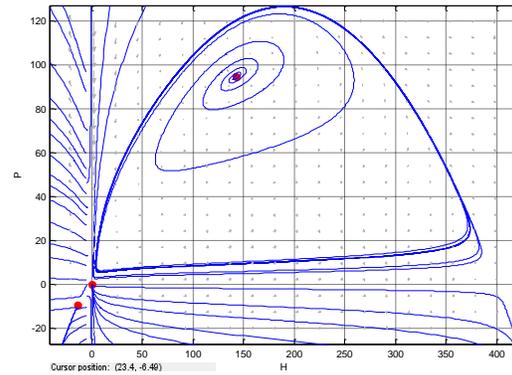


Fig. 11b: Retrato fase del modelo presa-depredador.

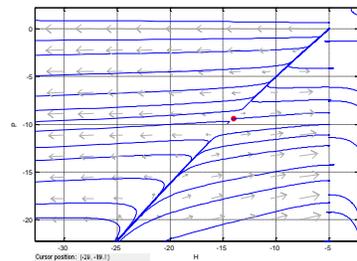


Fig. 11c: Ampliación del 1er punto crítico del modelo presa-depredador.

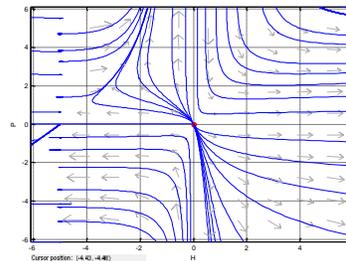


Fig. 11d: Ampliación del 2do punto crítico del modelo presa-depredador.

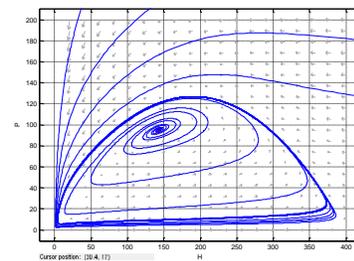


Fig. 11e: Ampliación del 3er punto crítico del modelo presa-depredador.

En la Tabla 8 se muestra el resumen del análisis de los puntos críticos del sistema autónomo ecológico. En esta tabla se corrobora lo observado en las Figuras 11b, 11c, 11d y 11e; lo anterior está en concordancia con lo reportado por Coughanowr & LeBlanc (2009).

Tabla 8: Resumen de los puntos críticos del sistema ecológico.

Punto crítico (H, P)	1	2	3
	(-14.0409, -9.3646)	(0, 0)	(142.3802, 94.9202)
Valor propio λ	1 -0.03989	2 497293.5679	0.016562+0.13844i 0.016562-0.13844i
Descripción de la raíz	Reales, distintas, signos opuestos	Reales, distintas, signos iguales	Complejas, parte real positiva
Comportamiento	Punto silla	Nodo	Punto espiral
Estabilidad	Inestable	Inestable	Inestable

También se puede mencionar que el punto crítico (142.38, 94.92) del modelo presa-depredador está en concordancia con lo citado por Tanner (1975).

En la Figura 12 se muestran las ecuaciones diferenciales del sistema económico en la ventana de *pplane8 setup* de MATLAB® *toolbox*. En dicha ventana se especifican las constantes del sistema y los valores máximos y mínimos de los ejes *C* y *K*.

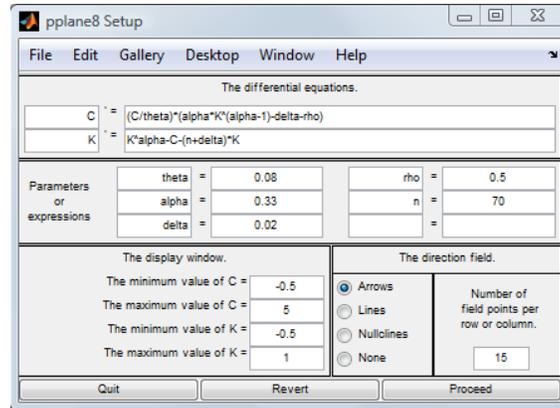


Fig. 12: Sistema económico en *pplane8.m*.

En la Figura 13a se muestran las trayectorias del plano de fases del modelo de Ramsey, en el cual podemos notar que tenemos un solo punto crítico que caracteriza al sistema autónomo económico. También podemos observar que las trayectorias muestran que el punto crítico es del tipo silla. Una ampliación del punto crítico es mostrada en la Figura 13b. La caracterización detallada de los puntos críticos del sistema autónomo económico es mostrada en la Tabla 9.

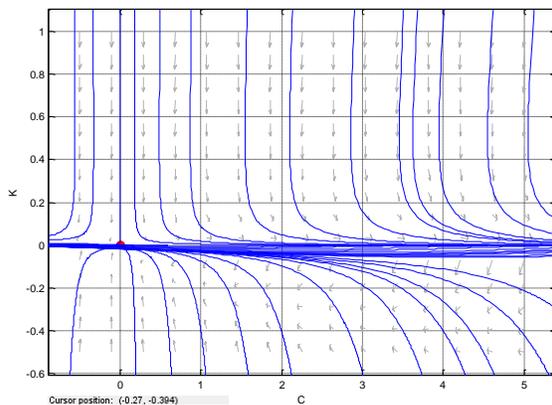


Fig. 13a: Retrato fase del modelo de Ramsey.

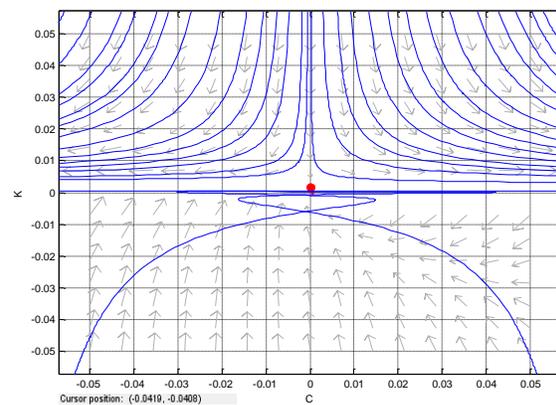


Fig. 13b: Ampliación del punto crítico del modelo de Ramsey.

En la Tabla 9 se muestra el resumen del análisis del único punto crítico del sistema autónomo económico. Varios autores entre ellos Aris (1973), Roffel & Betlem (2006) y Korn (2011) mencionan que si un sistema dinámico tiene un solo punto de equilibrio este debe ser inestable. En dicha tabla se corrobora que el punto de equilibrio es inestable de acuerdo con lo citado por Coughanowr & LeBlanc (2009).

pplane8.m (Polking, 2009) es una buena herramienta para el análisis de sistemas dinámicos ya que se ahorra tiempo en el diseño de programas para el cómputo de puntos críticos, comportamiento de las ecuaciones diferenciales, cálculo de valores propios y trazado de las trayectorias del plano de fases. También, puede ser

una herramienta poderosa para el proceso de enseñanza aprendizaje para estudiantes que cursan asignaturas tales como análisis de sistemas dinámicos, dinámica y control de procesos, análisis de ciclos de vida, ecología dinámica, dinámica costera, economía dinámica, entre otras.

Tabla 9: Punto crítico del sistema económico.

<i>Punto crítico</i> <i>(C, K)</i>		1
<i>Valor propio</i>	1	282.3325
λ	2	-46.9178
<i>Descripción de la raíz</i>		Reales, distintas, signos opuestos
<i>Comportamiento</i>		Punto silla
<i>Estabilidad</i>		Inestable

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en el presente estudio, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- ♦ *pplane8.m* es una excelente herramienta ya que caracterizó correctamente los puntos críticos de todos los casos de estudio según lo citado por Coughanowr & LeBlanc (2009).
- ♦ El objetivo del trabajo se cumplió ampliamente al realizar el análisis de los cuatro sistemas dinámicos estudiados de forma fácil, rápida y precisa.
- ♦ *pplane8.m* ayuda al proceso de diseño de sistemas de control para sistemas dinámicos autónomos de origen físico, mecánico, químico y/o combinaciones de ellos.
- ♦ *pplane8.m* ayuda a los ecólogos y economistas a diseñar estrategias para lograr un equilibrio ecológico y económico respectivamente.

REFERENCIAS

1. Aris, R. (1973). Análisis de Reactores. Temas Selectos de Química. 1ª ed. Madrid: Alhambra.
2. Bakshi, U.A. & Baski, M.V. (2008). Modern Control Theory. 1ª ed. India: Technical Publications Pune.
3. Bubnicki, Z. (2005). Modern Control Theory. 1ª ed. Germany: Springer.
4. Chau, P. C. (2002). Process Control: A First Course with MATLAB. 1ª ed. New York: Cambridge University Press.
5. Coughanowr, D.R. & LeBlanc, S.E. (2009). Process Systems Analysis and Control. 3ª ed. New York: McGraw-Hill.
6. Evans, L. C. (2004). An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. Recuperado, Febrero 11, 2013, del Department of Mathematics, University of California, Berkeley. Sitio web: <http://www.mamilog.hostoi.com/MAMILOG2012publ.pdf>.
7. Fairman, F.W. (1998). Linear Control Theory: The State space Approach. 1ª ed. Chichester: John Wiley and Sons.
8. Fogler, H.S. (2001). Elementos de Ingeniería de las Reacciones Químicas. 3ª ed. México: Prentice-Hall.
9. Haefner, J.W. (2005). Modeling Biological Systems: Principles and Applications. 2ª ed. New York: Springer.

10. Klee, H. & Allen, R. (2011). Simulation of Dynamic Systems with MATLAB® and Simulink®. 2ª ed. New York: CRC Press.
11. Korn, G.A. (2011). Interactive Dynamic-System Simulation. 2ªed. New York: CRC Press.
12. Lee, K.K. (1992). Lectures on Dynamical Systems, Structural Stability and their Applications. 1ª ed. Singapore: World Scientific Publishing.
13. Levenspiel, O. (2004). Ingeniería de las Reacciones Químicas. 3ª ed. México: Limusa-Wiley.
14. Marsden, J.E. & Ratiu, T.S. (1996). Introduction to Mechanics and Symmetry. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 76 (1), 44-62.
15. Polking, J.C. (2009). Phase Plane pplane8.m (MATLAB® toolbox). Recuperado, Enero 10, 2013, de Department of Mathematics, Rice University. Sitio web: <http://math.rice.edu/~dfield/#8.0>.
16. Ramsey, F. (1928). A mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, 38 (152), 543-559.
17. Regalado-Méndez, A., Cid-Rodríguez, M.R.P. & Báez-González, J.G. (2010). Problem Based Learning (PBL): Analysis in a Stirred Tank Chemical Reactors with a Process Control Approach. *International Journal of Software Engineering & Applications (IJSEA)*, 1 (4), 54-73.
18. Roffel, B. & Betlem, B. (2006). Process Dynamics and Control: Modeling for Control and Prediction. 1ª ed. Chichester: John Wiley and Sons.
19. Sastry, S. & Bodson, M. (1989). Adaptive Control, Stability, Convergence, and Robustness. Information and System Sciences Series. New Jersey: Prentice-Hall.
20. Slotine, J-J., E. & Li, W. (1991). Applied Nonlinear Control. 1ª ed. New Jersey: Prentice-Hall.
21. Smith, C.A. & Corripio, A.B. (2006). Principles and Practice of Automatic Process Control. 3ª ed. New Jersey: John Wiley and Sons.
22. Tanner, J.T. (1975). The Stability and the Intrinsic Growth Rates of Prey and Predator Populations. *Ecology*, 56, 855-867.
23. Tay, T.T., Mareels, I.M. Y. & Moore, J.B. (1997). High Performance Control. Singapore: Birkhäuser.
24. Trimborn, T. (2012). Dynamic Macroeconomic Modelling with MATLAB. Recuperado, Enero 20, 2013 de University of Hannover, Danish Graduate Program in Economics. Sitio web: http://econ.au.dk/fileadmin/Economics_Business/Research/DGPE/2012/Dynamic_Macroeconomic_Modeling_with_Matlab_March_1-2/Dyn_Mac.pdf.
25. Wei-Hau, X. (2010). Differential Equations for Engineers. 1ª ed. New York: Cambridge University Press.
26. William II, R.L. & Lawrence, D.A. (2007). Linear States-Space Control Systems. 1ª ed. New Jersey: John Wiley and Sons.