

REDUCCIÓN DE ESFUERZO COMPUTACIONAL EN LOS ANÁLISIS INGENIERILES POR ELEMENTOS DE CONTORNO

REDUCTION OF COMPUTATIONAL EFFORT IN ENGINEERING ANALYSIS BY BOUNDARY ELEMENT

Liseth Valencia¹, Elixanda Quezada¹

(1) Universidad Adventista Dominicana, Facultad de Ciencias, Autopista Duarte Km 74 1/2, Bonao - República Dominicana
(e-mail: lisethvalencia@unad.edu.do)

Recibido: 16/11/2018 - Evaluado: 21/01/2019 - Aceptado: 13/03/2019

RESUMEN

Se redujo el esfuerzo computacional empleado en el análisis del Método de Elementos de Contorno, lo que conduce a una mejora en la eficiencia del método, especialmente cuando se trata de tareas de Diseño Asistido por Computador (CAD). Se obtienen las fórmulas cerradas simples y eficientes para las matrices de influencia de los elementos de contorno en elasticidad plana, generando un ahorro sustancial de tiempo de ejecución computacional cuando se comparan con los métodos de integración numérica. Para generar las fórmulas, se usó la manipulación simbólica de las ecuaciones integrales y soluciones fundamentales a través del uso de Sistemas de Álgebra Computacional (SAC), seguido de un post-procesamiento de las expresiones generadas. Las fórmulas son adecuadas para la evaluación de integrales cuasi-singulares (punto de colocación muy cercano al elemento de integración) y la evaluación de integrales singulares (punto de colocación sobre el elemento de integración). Adicionalmente, se discute un ejemplo donde se aplica lo desarrollado en este trabajo.

ABSTRACT

The computational effort used in the analysis of the Boundary Elements Method was reduced. This leads to an improvement in the efficiency of the method, especially when it comes to Computer Aided Design (CAD) tasks. The simple and efficient closed formulas for the influence matrices of the boundary elements in flat elasticity are obtained. The simple and efficient closed formulas for the influence matrices of the contour elements in flat elasticity are obtained, generating a substantial saving of computational execution time when compared with the numerical integration methods. To generate the formulas, the symbolic manipulation of the integral equations and fundamental solutions was used through the use of Computational Algebra Systems (SAC), followed by a post-processing of the generated expressions. The formulas are suitable for the evaluation of quasi-singular integrals (placement point very close to the integration element) and the evaluation of singular integrals (placement point on the integration element). Additionally, an example is discussed where the work developed in this work is applied.

Palabras clave: esfuerzo computacional, Método de Elementos de Contorno (MEC), manipulación simbólica, elasticidad plana

Keywords: computational effort, Boundary Elements Method (BEM), symbolic manipulation, flat elasticity

INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos de Contorno se aplica a diferentes problemas en ingeniería, tales como: mecánica de la fractura, mecánica del contacto, barrera acústica, protección catódica (en casco de buques y torres de distribución eléctrica), entre otros. Sin embargo, singularidades débiles y fuertes surgen en esas formulaciones matemáticas, las cuales deben ser contornadas por técnicas y artificios numéricos. El Método de Elementos de Contorno (MEC), tiene una buena precisión en los resultados, resuelve problemas infinitos o semi-infinitos, e implica sólo la discretización del contorno, disminuyendo el costo computacional (Ferreira, 2016).

Hay dos temas de mayor preocupación cuando se utiliza el MEC: precisión y velocidad. Es bien sabido que las integrales singulares o casi singulares que surgen en BEM pueden producir resultados muy imprecisos, incluso en el caso de que se utilice un gran número de puntos de integración (grandes órdenes de cuadratura). Las integrales son singulares cuando el punto de origen (punto de colocación) pertenece al elemento de integración. Las integrales son casi singulares cuando el punto de origen no pertenece al elemento, pero está muy cerca de él. Cuando el punto de origen está cerca (o muy cerca) del elemento, produce resultados muy imprecisos cuando se utiliza la integración numérica. El punto de origen puede estar muy cerca del elemento de límite debido a algunas razones:

- a) Las variables interiores deben calcularse en regiones cercanas al límite
- b) Cuando se trata de cuerpos estrechos y delgados.
- c) Las diferentes densidades de malla están muy cerca entre sí (discretizaciones muy finas cerca de elementos grandes)

Por otro lado, cuando se utiliza la integración numérica, el usuario debe definir grandes órdenes de cuadraturas gaussianas para obtener resultados razonables. Esto implica grandes tiempos de CPU. En un problema no lineal de ingeniería práctica, discretizado con, por ejemplo, 200000 elementos de contorno, la necesidad de reducir el tiempo de CPU se vuelve relevante.

Durante las últimas dos décadas, muchos investigadores han dedicado tiempo y esfuerzo a obtener expresiones analíticas o semi-analíticas para calcular las integrales del MEC. Niu *et al.* (2005), usaron integración semi-analítica para integrales cuasi singulares. Además, Huanlin *et al.* (2008), consideraron la situación anisotrópica en los problemas potenciales de MEC y desarrolló integrales cerradas para tratar el efecto de la capa fronteriza. Ghadimi *et al.* (2010), presentaron la integración analítica de elementos constantes y lineales para resolver la ecuación de Poisson. Salvadori y Temponi (2010), se centraron en las ecuaciones integrales MEC en 3D, proporcionando formulas cerradas para las integrales de Lebesgue, las integrales singulares son calculadas utilizando la técnica de subdivisión de elementos y cuerpo rígido, comparando los resultados obtenidos con las ecuaciones analíticas. Loeffler *et al.* (2015), evaluaron el desempeño del MEC con interpolación directa para resolver el término integral referente a la inercia en la ecuación de Helmholtz, de forma que permitan el modelado de los espectros de respuesta y la solución del problema de autovalor. Dóro y Fernandes (2016), obtuvieron una solución no lineal por una formulación implícita, en la cual las correcciones de las deformaciones se hacen a través del operador tangente consistente que se actualiza a cada nueva iteración, teniendo como referencia los valores de las variables internas referentes al incremento convergido, lo que lleva a una convergencia cuadrática del proceso iterativo.

Este trabajo propone formas cerradas de las integrales singulares que surgen en el MEC y también formas cerradas para las integrales necesarias para evaluar los desplazamientos y tensiones en los puntos interiores. Las fórmulas son simples y rápidas, como se ve al comparar los tiempos de CPU de integración numérica con los requeridos por la integración analítica. El objetivo principal de este trabajo es mejorar el ahorro de tiempo de CPU.

Cuando se utiliza la integración numérica, el usuario debe definir grandes órdenes de cuadraturas gaussianas para obtener resultados razonables. Esto implica grandes tiempos de cómputo. En un problema no lineal de ingeniería práctica, discretizado con miles de elementos de contorno, la necesidad de reducir el tiempo de cómputo se vuelve relevante.

Sin embargo, al igual que en el caso de los elementos finitos, requiere del proceso de remallado, para garantizar la convergencia de la solución. Este paso en particular requiere de una constante conexión con los sistemas de dibujo asistido por computadora (CAD), además de intervención humana, ya que esta actividad consume una considerable cantidad de tiempo, que, si bien es necesario, no contribuye directamente con la solución del problema.

MEC CLÁSICO

En el MEC, solo se discretiza el contorno, y tanto los desplazamientos como las tensiones se interpolan sobre los elementos. Se incluye un breve resumen de la formulación del MEC para comprender la estructura de las fórmulas y cómo se puede manipular antes de la integración analítica.

La solución fundamental para los desplazamientos en dominios bidimensionales es

$$u_{ij}^*(P, Q) = \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln(r^{-1}) \delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad (1)$$

mientras que la solución fundamental para las tensiones es

$$t_{ij}^*(P, Q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[((1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j) r_n - (1-2\nu)(r_j n_i - r_i n_j) \right] \quad (2)$$

donde E es el módulo de Young, r es la distancia entre el punto de colocación y el punto de integración, r_i , r_j son las derivadas espaciales de r y n_i son las componentes del vector normal.

En muchas aplicaciones del MEC, para calcular estas integrales es muy común utilizar técnicas de integración numérica. Desafortunadamente, estas técnicas son caras, computacionalmente hablando, y no proporcionan suficiente precisión en presencia de núcleos singulares o cuasi singulares.

El elemento considerado es un elemento de tres nodos con tres funciones de interpolación cuadrática $F(n)$ dadas por

$$F^{(1)} = -\frac{\xi}{2}(1-\xi); \quad F^{(2)} = 1-\xi^2; \quad F^{(3)} = \frac{\xi}{2}(1+\xi) \quad (3)$$

donde ξ es la coordenada espacial en el dominio Gaussiano. La evaluación de los términos requiere del Jacobiano J , dado que el sistema de coordenadas es ahora adimensional.

Por otro lado, podemos escribir la identidad de Somigliana como

$$C_{ij} u_j = \sum_{e=1}^n U_{ij}^e u_j^e + \sum_{e=1}^n T_{ij}^e t_j^e \quad (4)$$

siendo,

$$U_{ij}^e = \int_{-1}^1 [T^e [F^e] J d\xi]; \quad T_{ij}^e = \int_{-1}^1 [U^e [F^e] J d\xi] \quad (5)$$

Note que las matrices U^e y T^{e-1} son de orden 2×6 . Esto involucra el cálculo de 24 integrales, lo cual es un proceso muy lento e ineficiente cuando se usa integración numérica.

METODOLOGÍA

En muchas aplicaciones del MEC, es muy común utilizar técnicas de integración numérica. Pero, desafortunadamente, estas técnicas son caras y no proporcionan suficiente precisión cuando se trata de núcleos singulares o casi singulares.

Manipulación simbólica

En este trabajo, se utilizaron elementos de contorno cuadráticos rectos para modelar tanto la geometría como las condiciones de contorno. Así, la interpolación se puede simplificar como:

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}; \quad y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \quad (6)$$

donde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son las coordenadas cartesianas del primero nodo, del nodo medio y del nodo del extremo respectivamente. Ahora, al mapear x e y en ξ , las coordenadas se pueden escribir como

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + \frac{1}{2}(x_3 + x_1); \quad y(\xi) = \frac{1}{2}(y_3 - y_1)\xi + \frac{1}{2}(y_3 + y_1) \quad (7)$$

Diferenciando la ec. (7), se tiene;

$$DX = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(x_3 - x_1); \quad DY = \frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \quad (8)$$

Asumiendo que el punto de colocación es P y que ξ es el punto de integración, el radio del vector entre ellos se escribe como $r(P, \xi)$

$$r = \sqrt{(x - x(\xi))^2 + (y - y(\xi))^2} = \sqrt{A\xi^2 + B\xi + C} \quad (9)$$

donde (x, y) son las coordenadas cartesianas del punto P . Sustituyendo la expresión (7) se sigue que ;

$$A = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2; \quad B = (2x - x_1 - x_3)(x_1 - x_3) + (2y - y_1 - y_3)(y_1 - y_3);$$
$$C = \left(x - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 \quad (10)$$

y $D1$ y $D2$ están dadas por

$$D1 = -x + \frac{1}{2}(x_1 + x_3); \quad D2 = -y + \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \quad (11)$$

Representación integral de la ecuación

La sustitución de las expresiones anteriores en las soluciones fundamentales (ver ecuaciones (1) y (2)) produce las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 u_{11}^*(\xi) &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[(4\nu-3) \ln(\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}) + \left(\frac{DX\xi + D1}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}} \right)^2 \right]; \\
 u_{12}^*(\xi) &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[\frac{(DX\xi + D1)(DY\xi + D2)}{A\xi^2 + B\xi + C} \right]; \quad u_{21}^*(\xi) = u_{12}^*(\xi); \\
 u_{22}^*(\xi) &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)} \left[(4\nu-3) \ln(\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}) + \left(\frac{DY\xi + D2}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}} \right)^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

y para las tensiones

$$\begin{aligned}
 t_{21}^*(\xi) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)(A\xi^2 + B\xi + C)\sqrt{D}} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{A\xi^2 + B\xi + C} (Dy\xi + D2)(Dx\xi + D1) \\ &\times ((Dy\xi + D2)Dx - (Dx\xi + D1)Dy) \\ &+ (1-2\nu)((Dx\xi + D1)Dx - (Dy\xi + D2)Dy) \end{aligned} \right\}; \\
 t_{22}^*(\xi) &= -\frac{(DY^*\xi + D2)DX - (DX^*\xi + D1)DY}{4\pi(1-\nu)(A\xi^2 + B\xi + C)\sqrt{D}} \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{DY^*\xi + D2}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}} \right)^2 \right] \\
 t_{11}^*(\xi) &= -\frac{(DY\xi + D2)DX - (DX\xi + D1)DY}{4\pi(1-\nu)(A\xi^2 + B\xi + C)\sqrt{D}} \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{DX\xi + D1}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}} \right)^2 \right]; \\
 t_{12}^*(\xi) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)(A\xi^2 + B\xi + C)\sqrt{D}} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{A\xi^2 + B\xi + C} (Dx\xi + D1)(Dy\xi + D2) \\ &\times ((Dy\xi + D2)Dx - (Dx\xi + D1)Dy) \\ &+ (1-2\nu)((Dy\xi + D2)Dy - (Dx\xi + D1)Dx) \end{aligned} \right\};
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Precisión

Software CAS fue usado para generar las rutinas de Fortran. Se llevó a cabo un gran manejo del posprocesamiento de las operaciones computacionales de Fortran. Además, fue necesario un análisis adicional para modificar las expresiones logarítmicas, donde pueden aparecer argumentos negativos. Después del posprocesamiento de las operaciones y rutinas de Fortran, el tamaño de las rutinas se redujo significativamente, lo que llevó a una reducción sustancial del tiempo de CPU.

Se utilizó la clásica norma estándar para estimar el error

$$\|e\| = \sqrt{\sum_{i,j} (A_{ij}^n - A_{ij}^a)^2} / \sum_{i,j} |A_{ij}^n|$$

donde A_{ij}^n y A_{ij}^a son los 12 términos de la matriz de coeficientes, calculados numéricamente y analíticamente. La integración numérica se realizó utilizando la cuadratura gaussiana estándar para la parte regular y la cuadratura

logarítmica para la parte no regular. La figura 1 (a) muestra un punto de colocación que se aproxima a un elemento de contorno. La ubicación inicial del punto de colocación está a una distancia de $3*L$ del elemento, mientras que la ubicación más cercana está en $L/1000$, siendo L la longitud del elemento.

Los errores en el coeficiente de la matriz de tensiones se muestran en la Tabla 1. Note que surgen errores en torno al 13% cuando se utiliza un orden gaussiano bajo ($N_{pg} = 8$) y el punto de colocación no está muy cerca del elemento ($r=L/20$). Al aumentar el orden de cuadratura hasta cincuenta puntos de Gauss ($N_{pg}=50$), el error se vuelve bastante pequeño, incluso cuando el punto de colocación está cerca del elemento. La situación empeora considerablemente cuando el punto de colocación está muy cerca del elemento. En estos casos, la cuadratura numérica es prácticamente incapaz de alcanzar un valor razonable, ya que los gradientes muy altos de la integral cuasi singular afectan fuertemente los cálculos numéricos.

Tabla 1: Errores (%) en la evaluación numérica de la matriz de tensiones

r	Npg=8	Npg=20	Npg=50
3L	0.00000	0.00000	0.00000
2L	0.00000	0.00000	0.00000
L	0.00000	0.00000	0.00000
L/2	0.00040	0.00000	0.00000
L/10	4.11670	0.04050	0.00000
L/20	13.8493	1.78340	0.00420
L/100	27.9283	22.4817	10.1807
L/500	38.2596	28.6780	27.7535
L/1000	45.0051	36.4540	28.6825

Prueba de velocidad

La viga en voladizo de la figura 1 (b) se utiliza para probar la velocidad de la integración analítica en comparación con la integración numérica. La viga fue analizada con varias discretizaciones, que van desde 400 a 2000 elementos cuadráticos. Además, se definieron 50 puntos internos dentro del dominio donde se calcularon numéricamente y analíticamente los tensores de desplazamiento y de tensión.

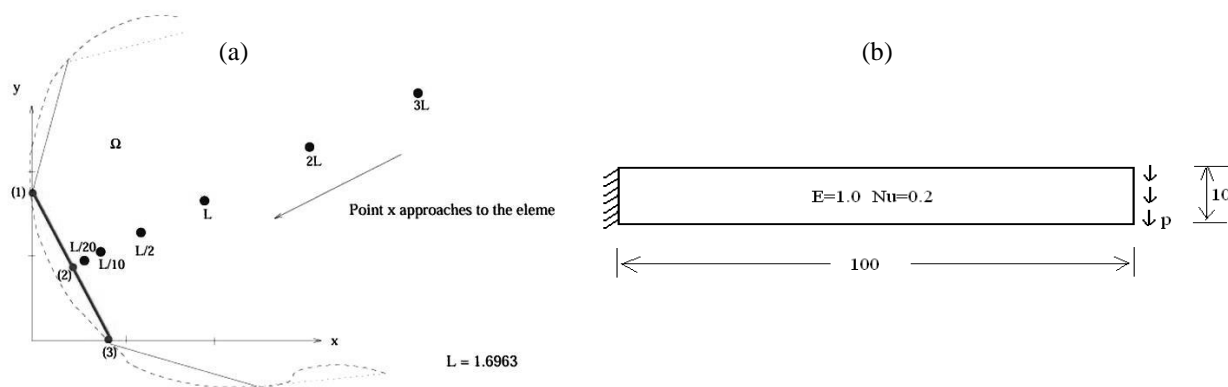


Fig. 1: (a) El punto de colocación se aproxima al elemento de Contorno (b) Viga en voladizo: 50 puntos internos

Se analizaron varias mallas utilizando integración numérica con diferentes órdenes de integración numérica ($N_{pg}=8, 20$ y 50). El número de puntos de Gauss fue el mismo para todos los elementos.

La comparación de los tiempos de CPU entre las integraciones numéricas y analíticas se presenta en la Tabla 2. Los valores en la tabla representan la relación entre el tiempo de CPU (seg.) requerido para la integración numérica y el tiempo de CPU (seg.) requerido para la integración analítica $T_n = N_{pg}/T_a$ (T_n = tiempo para la integración numérica, N_{pg} = número de puntos de Gauss, T_a = tiempo para la integración analítica).

Tabla 2: Razones entre los tiempos de CPU numéricos y analíticos para la integración de elementos (También se muestran los tiempos de CPU analíticos)

Elementos	$T_{n=8}/T_a$	$T_{n=20}/T_a$	$T_{n=50}/T_a$	T_a (seg.)
400	1.77	4.28	10.44	0.281
600	1.80	4.32	10.55	0.624
800	1.72	4.14	10.16	1.154
1000	1.74	4.19	10.30	1.778
1500	1.68	4.06	9.92	4.149
2000	1.70	4.09	10.02	7.301

Todas las pruebas se realizaron en una CPU Intel Core2-Quad que funcionaba a 2,40 GHz. El software fue escrito usando Fortran 90 y compilado con Intel Fortran Compiler. Cuando el número de puntos de Gauss de la integración numérica aumenta, los beneficios de la integración analítica se hacen cada vez más evidentes.

La Tabla 3 recopila los tiempos de CPU requeridos para calcular los tres pasos del análisis: integración de la matriz de coeficientes, solución del sistema de ecuaciones y cálculo del punto interno. La solución del sistema de ecuaciones se obtuvo mediante un método iterativo.

Tabla 3: Comparación de tiempos de CPU para el proceso de análisis: integración, solución del sistema y cálculo de puntos internos (segundos)

		Generación del sistema		Solución del sistema	Desplazamientos internos y tensión (50 puntos)		Tiempo total		Razón
Elementos	DOF	Numérica	Analítica	Iteraciones	Numérica	Analítica	TTn	TTa	TTn/TTa
400	1600	1.181	0.281	0.641	0.373	0.049	2.195	0.971	2.26
600	2400	2.672	0.624	2.449	0.905	0.092	6.026	3.165	1.90
800	3200	4.750	1.154	6.238	1.433	0.190	12.42	7.582	1.64
1000	4000	7.424	1.778	13.62	2.867	0.311	23.92	15.71	1.52

DISCUSIÓN

Los tiempos de integración analítica fueron alrededor de un 70% menos costosos que los tiempos de integración numérica al utilizar un orden de cuadratura de 8 puntos de Gauss. Con un orden de cuadratura de 20 puntos de Gauss, los resultados fueron aún más significativos, siendo la integración numérica cuatro veces más costosa que la analítica.

La precisión se evaluó satisfactoriamente, dando muy buenos resultados incluso cuando el punto de colocación P está muy cerca del elemento. La integración analítica es mucho más eficiente que la integración numérica, tanto

en la generación de la matriz de coeficientes global como en el cálculo de los desplazamientos y tensiones en los puntos internos.

Esta metodología se extiende para aplicaciones tridimensionales, considerando que la integración 3D requiere mucho más tiempo que la 2D, ya que los resultados preliminares muestran que las expresiones matemáticas para el caso 3D son sustancialmente más complejas que las expresiones para el análisis 2D.

CONCLUSIONES

El objetivo principal del trabajo fue reducir los tiempos de CPU para integrar el elemento. Se obtuvieron tiempos de CPU muy atractivos, en comparación con la integración numérica utilizando cuadraturas gaussianas. En aplicaciones del MEC generales que involucran análisis no lineales, este hecho es bastante relevante, ya que la matriz de coeficientes debe ser evaluada muchas veces.

Con respecto a las rutinas de Fortran generadas por el software CAS, podemos decir que son extensas. Sin embargo, la metodología utilizada en este trabajo para optimizar (posprocesamiento) estas rutinas permitió una reducción relevante en el número de operaciones y, también, en la reducción de operaciones informáticas falsas y redundantes. Así, se obtuvo un código más eficiente, compacto y rápido. También es posible observar una concordancia entre los valores obtenidos numéricamente y los valores analíticos, mostrando así la precisión y adecuación de esta técnica en este tipo de problemas.

REFERENCIAS

Dóro, Vinicio da Cunha, & Fernandes, Gabriela Rezende (2016). Análise não linear de chapas através de uma formulação do método dos elementos de contorno com convergência quadrática. *Matéria*, 21 (1), 27-48.

Ferreira, M. (2016). Método do elemento de contorno e função de green numérica aplicado ao estudo de estruturas. *Augustus*, 21 (41), 90-96.

Ghadimi, P., Dashtimanesh, A. & Hosseinzadeh, H. (2010). Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration. *App. Math. Comp.*, 217(1), 152-163.

Huanlin, Z., Zhongrong, N., Changzheng, C. & Zhongwei, G. (2008). Analytical integral algorithm applied to boundary layer effect and thin body effect in BEM for anisotropic potential problems. *Comp & Struct*, 86 (15-16), 1656-1671.

Loeffler, C.F., Mansur, W.J., & Barcelos, H.M. (2015). Comparação de Desempenho entre o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Helmholtz. *VI Encontro Científico de Física Aplicada*.

Niu, Z., Wendland, W., Wang, X. & Zhou H. (2005). A semi-analytical algorithm for the evaluation of the nearly singular integrals in three-dimensional boundary element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 194 (9-11), 1057-1074.

Salvadori, A. & Temponi, A. (2010). Analytical integrations for the approximation of 3D hyperbolic scalar boundary integral equations. *Eng. Anal. Bound. Elem*, 34 (11), 977-994.