

# UN MODELO MATEMÁTICO PARA MEDIR LA ACUMULACIÓN DE PETRÓLEO EN UN LAGO POR ACCIÓN DE UN POSIBLE DERRAME

## A MATHEMATICAL MODEL TO MEASURE THE ACCUMULATION OF OIL IN A LAKE BY THE ACTION OF A POSSIBLE OIL SPILL

**Said Kas-Danouche<sup>1</sup>, Liseth Valencia<sup>1</sup>, Mary L. Nova<sup>1</sup>, María Peña<sup>1</sup>**

(1) (1) Universidad Adventista Dominicana, Facultad de Ciencias, Coordinación de Matemáticas,  
Autopista Duarte Km 74 1/2, Villa sonador-Bonao - República Dominicana  
(email: said@unad.edu.do, sak0525@gmail.com, lisethvalencia@unad.edu.do, liseth.valencia@gmail.com)

*Recibido: 16/11/2018 - Evaluado: 29/01/2019 - Aceptado: 176/04/2019*

### RESUMEN

En esta investigación se derivó un modelo matemático considerando mecanismos que gobiernan el fenómeno y algunas idealizaciones. Este modelo mide la acumulación de petróleo, en un lago, a medida que se derrama en un río que desemboca en él. Se considera la ley de conservación de masa, obteniendo una ecuación diferencial ordinaria lineal, cuya solución analítica presenta una proyección clara de la acumulación de petróleo en el lago. Se recomienda esta ecuación obtenida para proyectar el impacto del derrame de petróleo en un lago, debido a que mide de una manera rápida y menos costosa si comparamos con experimentos en la situación real, permitiendo identificar rápidamente las expectativas y reduciendo los riesgos asociados con la experimentación tradicional.

### ABSTRACT

In this research a mathematical model was derived considering mechanisms that govern the phenomenon and some idealizations. This model measures the accumulation of oil, in a lake, as it spills into a river that flows into it. The law of conservation of mass is considered, obtaining a linear ordinary differential equation, whose analytical solution presents a clear projection of the accumulation of oil in the lake. This obtained equation is recommended to project the impact of the oil spill in a lake, since it measures in a quickly and less expensive way if we compare with experiments in the real situation, allowing to rapidly identify expectations and reducing the risks associated with traditional experimentation.

Palabras clave: modelo matemático, derrame de petróleo, ecuaciones diferenciales

Keywords: mathematical model, oil spill, differential equations

## INTRODUCCIÓN

El petróleo es un recurso natural no renovable provisto por la tierra, el cual se ha convertido en indispensable, debido a las múltiples necesidades que éste y sus derivados suplen. Con el paso del tiempo el petróleo ha tenido un gran impacto en el ambiente natural, pérdida de seres vivos, aumento del calentamiento global, por mencionar algunos, y diversos autores se han apoyado en la matemática para presentar esta difícil situación, ya que el petróleo vertido viene provocando mucho daño desde hace años.

Fuentes *et al.* (2001), con la finalidad de optimizar la explotación de un yacimiento de petróleo, generaron un modelo de déficit de presión, para el cual fueron considerados tres medios: el terreno, las fracturas y los vórgulos. Estos tres medios fueron considerados como fractales u objetos matemáticos que tienen dimensión fraccionaria. Al analizar estos medios fractales, surgió el interés por desarrollar el proyecto con el uso de cálculo fraccionario y se realizaron tomografías computarizadas; en el modelo participaron físicos, geofísicos, matemáticos, ingenieros y programadores. El déficit de presión fue importante a la hora de calcular en dónde ubican los pozos petroleros, cómo se seleccionan los pozos productores y en dónde se colocan los pozos inyectores. Todo esto se modeló según los tipos de yacimientos que hay en México, además agregaron que no cualquier yacimiento puede modelarse, solo los que tienen cierto tipo de suelos, que corresponden a los suelos carbonatados, pues esa estructura es la que se puede modelar con cálculo fraccionario. Los yacimientos que hay en el oriente de ese país son de otra forma y necesitan otro tipo de modelos.

Begalishvili *et al.* (2012), realizaron un modelo matemático con el objetivo de describir la propagación de derrames de petróleo de emergencia en ríos y aguas del oeste de Georgia, a través de soluciones analíticas y el método de simulación estadística (Método Monte Carlo), concluyen que en invierno la propagación de petróleo es más intensa que en verano, debido a que la mezcla permanece en la superficie causando un aumento en la masa transferida a la orilla y una contaminación de la línea costera, mientras que en verano la concentración disminuye. Aghajanloo *et al.* (2013), investigaron el comportamiento del derrame de petróleo en el Golfo Pérsico, sobre la codificación de un modelo hidrodinámico basado en la profundidad bidimensional promediada con ecuaciones discretas, auxiliándose del modelo de volumen finito aplicado en estructuras rectangulares. Los resultados muestran la capacidad del modelo en la aplicación de un posible incidente de derrame de petróleo en el mar y sus efectos en el medio ambiente.

También existen modelos para predecir trayectorias de derrames de petróleo en el mar, a través de ecuaciones de conservación de masa y momento, donde la propagación es afectada por las fuerzas inerciales y viscosas, las cuales contrarrestan la gravedad y toman en cuenta los efectos de los vientos y las corrientes de agua. Calzada *et al.* (2015), desarrollaron un modelo determinista para el pronóstico de la trayectoria de manchas de petróleo en mar profundo y lejos de la costa, con posibilidades de incluir dominios con una batimetría compleja de la plataforma insular cubana, el modelo emplea un enfoque lagrangiano para simular los procesos físicos que se desarrollan en la mancha, tales como: el esparcimiento, la advección, la difusión y la interacción con la línea de costa. Por otro lado, Casanova (2016), hace un estudio sobre los derrames de litros de petróleo en las Islas Canarias, donde muestra y predice el movimiento del crudo en el mar por el derrame del barco O'leg Naydenov'. Para realizar el modelo se apoya de la ecuación de advección-difusión-reacción, toma en cuenta tanto la generación de petróleo debida a fugas del barco, como la extracción de combustible debida a barcos de bombeo. Se concluye que, debido a los vientos y mareas con dirección predominante al noreste, el petróleo se adentra al océano Atlántico y que existe una gran necesidad de estudiar la trayectoria de los barcos para evitar cruzar por zonas peligrosas.

La contaminación por petróleo crudo o refinado es generada accidental o deliberadamente: Se estima que 3800 millones de litros entran cada año a los océanos como resultado de las actividades humanas, de éstos, sólo 8% se debe a fuentes naturales; por lo menos 22% a descargas operacionales intencionales de los barcos, 12% por derrames de buques y otro 36% por las descargas de aguas residuales. Además, los derrames de petróleo y los desechos producen una alteración del sustrato original en el que se implantan las especies vegetales, produce

grandes daños en la fauna; las aves son las más afectadas por contacto directo con los cuerpos de agua o vegetación contaminada, o por envenenamiento por ingestión. El efecto sobre las aves puede ser letal. Los datos acumulados de consultorías ambientales han mostrado que en el mejor de los casos solo un cuarto de las aves contaminadas llega a tierra; vivas o muertas. El resto desaparece en el mar o se hunden porque no pueden volar (Greenpeace, 2012).

Desde 1960 se han producido más de 130 desastres de derrames, en los años noventa se estimaba que alrededor del 0,1 al 0,2% de la producción mundial de petróleo terminaba vertida al mar, aproximadamente 3 millones de toneladas, las que acaban contaminando las aguas cada año. A mayor necesidad de petróleo, aumenta la extracción, transportación y a su vez los derrames, los cuales son provocados por el hombre; transporte y/o daño de maquinarias, las que afectan parte de la corteza terrestre dejando en ocasiones daños irremediables, siendo este uno de los más graves desastres que atentan contra la biodiversidad en los mares y océanos.

Se ha mencionado que el derrame de petróleo se produce debido a un accidente o práctica inadecuada que contamina el medio ambiente, especialmente el mar, por otro lado, el autor Delgado (2011), expresa que los derrames en la industria petrolera, lejos de ser ocasionales, son sistemáticos. Estos derrames afectan todo el ecosistema donde se produce el evento el cual perjudica catastróficamente la fauna y la pesca, así como a las costas con efectos que pueden llegar a ser muy persistentes en el tiempo. El proceso de perforación y extracción suele ser sencillo. Se introduce y baja una especie de cañón y se perfora la tubería de revestimiento justo en el punto donde se ha detectado la bolsa. Lo habitual es que el petróleo fluya por los orificios que se han hecho y se pueda extraer mediante una tubería de un diámetro más pequeño. A esta tubería se le denomina tubería de producción.

Para dar a conocer la cantidad de petróleo que se acumula en un lago para un tiempo determinado y por acción de un derrame, se hace uso de la modelización matemática por medio de ecuaciones diferenciales. En este artículo el interés es mostrar mediante el modelo matemático propuesto, la cantidad de petróleo que se acumula en un lago a causa de su derrame.

## **ECUACIONES DIFERENCIALES**

Una ecuación matemática en la que interviene una función desconocida y sus derivadas se conoce como una ecuación diferencial, y se clasifica dependiendo del número de variables independientes que intervienen, sus derivadas y el orden de los términos. Entre las ecuaciones diferenciales se pueden mencionar las ecuaciones diferenciales ordinarias, que son aquellas que contienen solamente derivadas de la función incógnita y con respecto a una sola variable independiente,  $x$ . Se dice que dicha ecuación es lineal de primer orden si tiene la forma:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Se observa que la característica de este tipo de ecuaciones es el hecho de que la variable  $y$ , así como  $y' = \frac{dy}{dx}$  están elevadas a la potencia uno, además de que el coeficiente de  $y$  es una función de la variable  $x$ . Este tipo de ecuaciones diferenciales recibe además el nombre de ecuación diferencial lineal homogénea cuando el término  $Q(x)$  es cero, y si  $Q(x)$  es diferente de cero, recibe el nombre de ecuación diferencial lineal no-homogénea.

Se denomina solución de una ecuación diferencial a toda función derivable  $y = f(x)$  que cumpla con dicha ecuación diferencial; es decir, que al derivarla y sustituirla en la ecuación diferencial se satisfaga la ecuación.

## **METODOLOGÍA**

En el modelo matemático obtenido en esta investigación, se utiliza una ecuación diferencial ordinaria lineal para presentar la contaminación producida por petróleo vertido en un fluido. En la ecuación se toma como punto

clave el vertido de los galones de petróleo, con relación a los galones presentes de agua. Se utilizan galones para ser más específicos, tomando en cuenta la equivalencia que tiene con litros cuando sea necesario. La contaminación de agua después del vertido de galones de petróleo se representa mediante una ecuación diferencial.

Como suposición se asume que un lago tiene una cantidad  $G$  de galones de agua en el cual se vierten  $a$  galones de petróleo por cada galón de agua limpia, y entran  $m$  galones de agua limpia por minuto, y salen  $m$  galones de agua contaminada con petróleo por minuto, siendo  $A(t)$  la cantidad de galones de petróleo acumulados en el lago después de cierto tiempo  $t$  (ver figura 1).

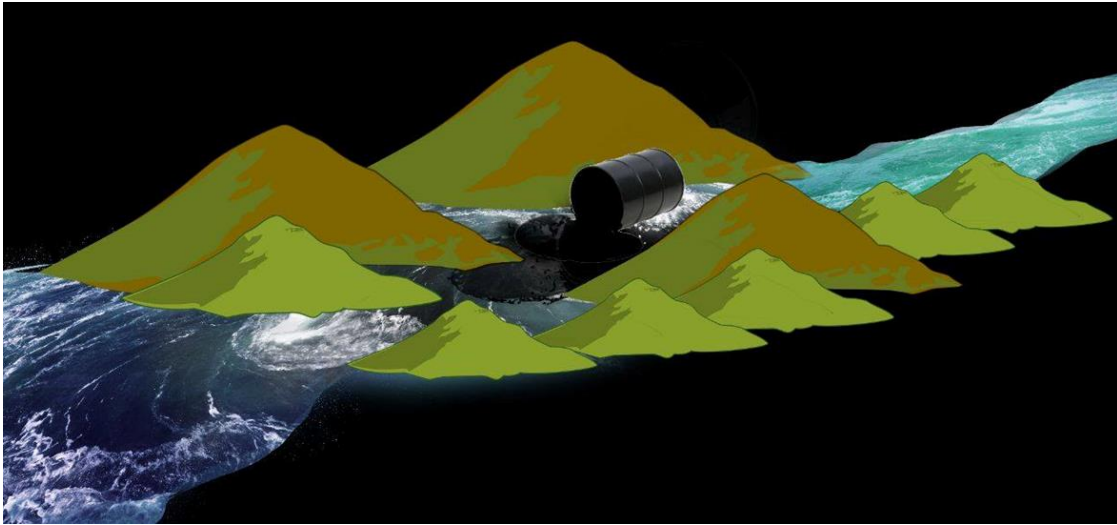


Fig. 1: Simulación de la contaminación por derrame de petróleo en un lago. Refleja agua que entra limpia, petróleo que se derrama y el agua que sale contaminada.

Para saber cuánto petróleo se acumula en el lago después de  $t$  unidades de tiempo, se realizan operaciones donde intervienen  $a$  galones de petróleo,  $G$  galones de agua presentes en el lago, para mantener el mismo volumen del lago, se supone  $m$  galones de agua limpia que entran y  $m$  galones de agua contaminada que salen,  $\frac{dA}{dt}$  = cantidad ganada (CG) - cantidad perdida (CP).

La CG viene dada por  $a$  galones de petróleo que ingresan por cada galón de agua limpia ganada, y entran  $m$  galones de agua limpia por unidad de tiempo; así  $CG = a \cdot m$

Para encontrar CP, se requiere de la concentración de petróleo en el lago (CPL) que es igual a la cantidad de petróleo acumulada  $A$  entre la cantidad de agua  $G$  en el lago

$$CPL = \frac{A(t)}{G}.$$

Por lo cual,

$$CP = m \cdot CPL = \frac{m}{G} A(t).$$

Es así como se obtiene la ecuación

$$\frac{dA}{dt} = a \cdot m - \frac{m}{G} A(t). \tag{1}$$

En la ecuación (1),  $a$ ,  $m$  y  $G$  son conocidas. Se designa como  $A_0$  al valor de  $A(t)$  para  $t = 0$ .

La ecuación (1) se puede re-escribir como

$$A' + \frac{m}{G} A = a \cdot m \quad (2)$$

La ecuación homogénea es:

$$A'_H + \frac{m}{G} A_H = 0 \quad (3)$$

La solución de la ecuación homogénea relativa a (2) es:

$$A_H = C e^{-\frac{m}{G} t}$$

donde  $C = A(t = 0) = A_0$

Ahora, supóngase que (2) tiene una solución de la forma:

$$A_v(t) = C(t) e^{-\frac{m}{G} t} \quad (4)$$

$$A(0) = A_0 = C(0) e^0 = C(0)$$

sustituyendo en (2), se tiene;

$$C'(t) = a \cdot m e^{-\frac{m}{G} t} - \frac{m}{G} C(t) e^{-\frac{m}{G} t} + \frac{m}{G} C(t) e^{-\frac{m}{G} t} = a \cdot m$$

Es así como resulta la ecuación,

$$C'(t) = a \cdot m e^{\frac{m}{G} t}$$

Integrando con respecto a  $t$  una vez, se llega a que;

$$C(t) = a \cdot m \frac{G}{m} e^{-\frac{m}{G} t} + k,$$

y al evaluar dicha expresión en  $t = 0$ , se obtiene,

$$k = A_0 - a G ;$$

así,

$$\begin{aligned} C(t) &= a \cdot G e^{-\frac{m}{G} t} + A_0 - a G \\ &= A_0 + a \cdot G \left( e^{\frac{m}{G} t} - 1 \right) \end{aligned}$$

De este modo, sustituyendo la expresión obtenida para  $C(t)$  en la ecuación (4), se obtiene:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{m}{G} t} + a \cdot G \left( 1 - e^{-\frac{m}{G} t} \right) \quad (5)$$

lo cual permite medir una estimación de la contaminación del lago, por acumulación de petróleo, con respecto al tiempo.

## EXPERIMENTO NUMÉRICO

Con el objetivo de mostrar los alcances de la ecuación diferencial creada, se plantea una situación de un posible derrame en un lago al cabo de un tiempo, en donde se definieron las siguientes variables:

- ✓  $A(t)$  la cantidad de galones de petróleo acumulada después de  $t$  minutos.
- ✓  $a$  la cantidad de galones de petróleo que entran (se vierten) por cada galón de agua.

- ✓  $m$  la cantidad de galones de agua contaminada que entran y salen/minuto.
- ✓  $G$  son los galones de agua contaminada presente en el lago.
- ✓  $A_0$  es la cantidad de galones de petróleo acumulada en el tiempo 0.

Si se supone que en un momento  $t = 0$  hay 10 galones de petróleo presentes en el lago, y que este a su vez contiene 28000 galones de agua contaminada, en donde que se vierten 0.2 galones de petróleo por cada galón de agua en el agua del río, y que entran y salen 5 galones de agua contaminada por minuto. ¿Cuántos galones de petróleo se acumulan al cabo de 1, 3 y 7 días? Los resultados se muestran de forma gráfica en la figura 2.

#### Datos

$t = 1,440$  minutos en un día / 4, 320 minutos en tres días y 10,080 minutos en una semana.

$A_0 = 10$  galones de petróleo.

$G = 28000$  galones de agua.

$a = 0.2$  galones de petróleo por cada galón de agua en el río.

$m = 5$  galones de agua que entran y salen.

Para mostrar la cantidad de petróleo presente en el lago después de 1 día, se sustituye:

$$A(t) = 10e^{-\frac{5}{28000} \cdot 1440} + (0.2) 28000 \left(1 - e^{-\frac{5}{28000} \cdot 1440}\right)$$

$$A(t) = 1580.8 \text{ galones de petróleo acumulados.}$$

Para conocer la cantidad de petróleo acumulado en 3 días, se adaptan los datos y se resuelve:

$$A(t) = 10e^{-\frac{5}{28000} \cdot 4320} + (0.2) 28000 \left(1 - e^{-\frac{5}{28000} \cdot 4320}\right)$$

$$A(t) = 6517.6 \text{ galones contaminados de petróleo.}$$

Por otro lado, si se desea saber la cantidad de petróleo al cabo de una semana, se sustituye la variable tiempo por 10,080 minutos, que es la equivalencia de una semana en minutos:

$$A(t) = 10e^{-\frac{5}{28000} \cdot 10080} + (0.2) 28000 \left(1 - e^{-\frac{5}{28000} \cdot 10080}\right)$$

$$A(t) = 28345 \text{ galones de agua contaminados por petróleo.}$$

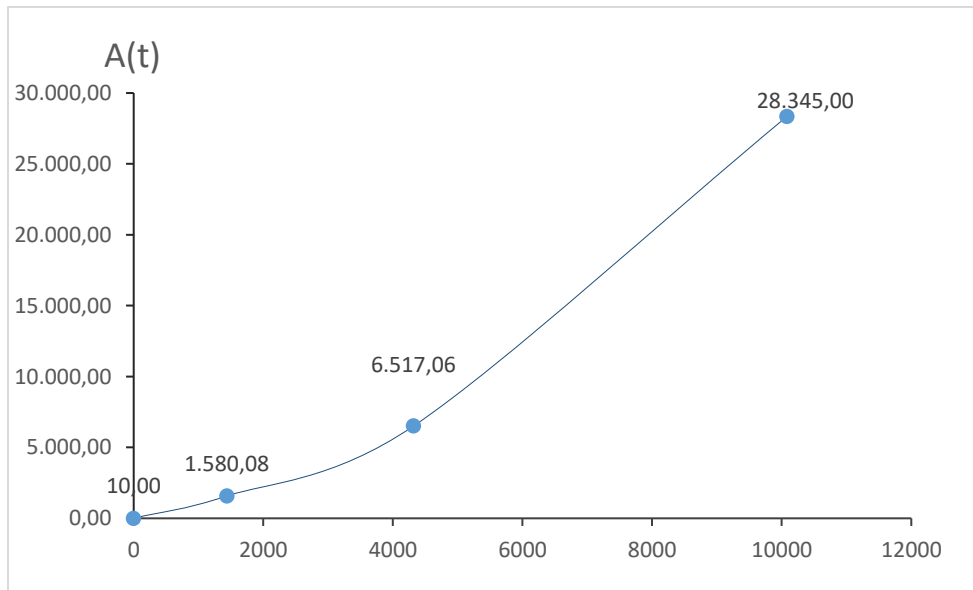


Fig. 2: Gráfica de la cantidad acumulada de petróleo al cabo de 1, 3 y 7 días (tiempo en minutos).

A través del uso de esta ecuación diferencial se presenta la contaminación de un lago por la entrada de galones de petróleo. Se tomó como tiempo: un día equivalente a 1440 minutos; 3 días que son 4320 minutos y una semana igual a 10080 minutos, con lo que se mostró el aumento de  $A(t)$ , acumulación de petróleo en el lago conforme al tiempo. Para una mejor apreciación de los resultados ver figura 2.

## CONCLUSIONES

Este trabajo brinda de manera general un método para mostrar la contaminación producida por la acumulación de petróleo a causa de un derrame del mismo después de un tiempo determinado, y así predecir su comportamiento futuro, a través de ecuaciones diferenciales.

Se derivó un modelo matemático considerando mecanismos que gobiernan el fenómeno y algunas idealizaciones. Este modelo mide la acumulación de petróleo, en un lago, a medida que se derrama en un río que desemboca en él. Se considera la ley de conservación de masa y se obtuvo una ecuación diferencial ordinaria lineal, cuya solución analítica presenta una proyección clara de la acumulación de petróleo en un lago.

Se recomienda la ecuación obtenida como una herramienta muy aceptable para proyectar el impacto del derrame de petróleo en un lago, debido a que mide la acumulación de petróleo de una manera rápida y menos costosa, permitiendo identificar rápidamente las expectativas y reduciendo los riesgos asociados con la experimentación tradicional.

## REFERENCIAS

- Aghajanloo, K., Pirooz, M.D. & Namin, M.M. (2013). Numerical Simulation of Oil Spill Behavior in the Persian Gulf. *International Journal of Environmental Research*, 7(1), 81-96.
- Begalishvili, N., Tsintsadze, T. & Tsintsadze, N. (2012). Mathematical Modeling of Oil Pollution Dissemination in River and Sea Waters of the Western Georgia. *Turkish Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 12, 493-496.
- Calzada, A., Pérez, F., Reyes, D. & Casals, R. (2015) Modelación de los derrames de petróleo mediante el empleo de PETROMAR. *Revista Cubana de Meteorología*, 21 (2), 57-69.
- Casanova, U. (2016). Modelización del movimiento de manchas de petróleo en mar abierto: aplicación al caso del hundimiento del pesquero Oleg Naydenov y de su impacto en las costas de las Islas Canarias y África. *Tesis de Maestría*, Universidad Complutense de Madrid, España. <http://www.mat.ucm.es/~ivorra/papers/MemoriaUbay.pdf>. Consultado el 12 de marzo del 2018.
- Delgado, G.C. (2011). Petróleo, medio ambiente, cambio climático y seguridad: Macondo, otra advertencia más. *Nómadas. Revista Crítica de Ciencias Sociales y Jurídicas*, 30 (2), 17 pág., DOI: 10.5209/rev\_NOMA.2011.v30.n2.36554
- Fuentes, C., Brambila, F., Vauclin, M., Parlange, J-Y. & Haverkamp, R (2001). Modelación fractal de la conductividad hidráulica de suelos no saturados. *Ingeniería hidráulica en México*, XVI (2), 119- 137.
- Greenpeace* (2012) Impactos ambientales del petróleo [https://storage.googleapis.com/planet4-mexico-stateless/2018/11/cd1362c6-cd1362c6-impactos\\_ambientales\\_petroleo.pdf](https://storage.googleapis.com/planet4-mexico-stateless/2018/11/cd1362c6-cd1362c6-impactos_ambientales_petroleo.pdf). Consultado el 05 de abril del 2018.

